

MODEL SISTEM MULTI AGEN LINEAR DENGAN FORMASI SEGITIGA

R. Heru Tjahjana

Program Studi Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. Soedarto, SH, Semarang, 50275

heru_tjahjana@undip.ac.id

Abstract. In this paper, a linear model of multi agent movement in equilateral triangle formation is considered. The agents have initial and final state in triangular formation. Along the motion, all agents can not move far away and collide. The agents are steered from initial position to final position in fixed time. For this goal, optimal control with Pontryagin Maximum Principle is applied and the classic difficulty in the optimal control problem is appear. To solve the classic difficulty above, the steepest descent method is used.

Keywords: multi agent, Pontryagin Maximum Principle, triangular formation, steepest descent method

1. PENDAHULUAN

Fenomena bergerombol secara alami sering terjadi pada hewan. Beberapa hewan seperti lebah, angsa, ikan [3], [7], zooplankton, burung, serigala, dan organisme lainnya menunjukkan perilaku bergerombol tersebut [2]. Fenomena bergerombol juga sengaja diciptakan pada wahana udara tanpa awak (*Unmanned Air Vehicle*), robot, kapal perang dan pesawat tempur. Banyak para peneliti sebelumnya telah mengusulkan model untuk fenomena bergerombol. Breder [1] menulis model agregasi ikan dengan gaya tolak dan gaya tarik. Warburton dan Lazarus [9] mempelajari model untuk jarak kohesi sosial dalam kelompok hewan. Mogilner dan Keshet [4] menuliskan model kontinu untuk perilaku bergerombol berdasarkan interaksi non-lokal. Interaksi ini diasumsikan akan mempengaruhi kecepatan organisme. Model ini terdiri dari persamaan *integral-differential* dan *advection-diffusion*. Keshet [4] mengusulkan model matematika dari fenomena bergerombol untuk ilmu-ilmu sosial. Dia mensurvei beberapa masalah yang berhubungan dengan fenomena bergerombol dan masalah sosial dengan mengindikasikan beberapa tantangan dan model matematika. Dalam makalahnya, ia

memodelkan fenomena bergerombol, tetapi dia tidak menggunakan pendekatan kontrol. Gazi dan Passino [2] memberikan model untuk sebuah gerombolan. Mereka menentukan model waktu kontinu dalam ruang agregasi gerombolan pada dimensi n dan mempelajari sifat-sifat kestabilannya, serta mempelajari pusat gerak melingkar dari para agen. Topaz dan Bertozzi [8] membangun sebuah model kontinu untuk gerakan organisme biologis yang mengalami interaksi sosial dan mempelajari perilakunya. Model ini mengambil bentuk hukum konservasi dalam dua dimensi ruang. Shi, wang, dan Chu [6] mempertimbangkan model *anisotropic swarm* dengan daya tarik dan fungsi tolakan serta mempelajari sifat agregasinya. Banyak penelitian tentang fenomena telah dilakukan dan diterbitkan, tetapi kebanyakan berfokus pada perilaku bergerombol lokal atau sesuatu yang sangat jauh dari masalah transportasi. Model mereka tidak dapat diterapkan pada masalah seperti pesawat atau konvoi kapal. Pada bagian berikutnya, kami mengusulkan suatu model bergerombol atau multi agen menggunakan kontrol optimal untuk sistem linear.

2. MODEL

Kita mulai dengan mempertimbangkan sistem persamaan diferensial orde satu yang dapat dipandang sebagai suatu model multi agen sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}_2 \\ &\dots \\ \dot{\mathbf{x}}_k &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

untuk $i=1,2,3,\dots,k$, keadaan agen ke- i dinotasikan dengan \mathbf{x}_i , A_i adalah matriks bertipe $n \times n$, B_i matriks bertipe $n \times m$, dan \mathbf{u}_i menotasikan kendali atau kontrol untuk agen ke- i . Keadaan awal dan akhir para agen sudah diketahui dan disajikan berturut-turut sebagai

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{x}_i(T) = \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

dengan \mathbf{r}_i menotasikan keadaan awal agen ke- i of dan \mathbf{q}_i menotasikan keadaan akhir agen ke- i . Karena model usulan menggunakan pendekatan kontrol optimum, maka fungsional ongkos mempunyai peranan penting. Fungsional ongkos yang terkait dengan model usulan didefinisikan sebagai

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^k \delta \mathbf{P} \mathbf{u}_i(t) \mathbf{P}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{\gamma}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \mu \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 dt. \quad (3)$$

Dalam persamaan fungsional ongkos yang disajikan dalam (3), ongkos pengendalian yang digunakan disajikan dalam suku pertama integran pertama. *Penalty* yang akan meningkatkan ongkos Pengendalian jika para agen bergerak Terlalu dekat satu sama lain disajikan oleh suku yang kedua. Fungsi atraktor antara dua agen yang berbeda disajikan dalam suku ketiga terakhir. Fungsi atraktor ini digunakan untuk menarik dua agen yang berbeda jika keduanya akan bergerak menjauh satu sama lain. Serupa dengan kasus fenomena bergerombol di alam bebas, dimana para agen tidak boleh bertabrakan satu sama lain, agen-

agen dalam model yang diusulkan pun juga tidak pernah diperbolehkan bertabrakan satu sama lain. Juga, fakta bahwa para agen tidak dapat mengendalikan agen-agen yang lain, dalam model usulan ini ditampakkan oleh para persamaan diferensial yang independen satu sama lain dalam satu sistem persamaan diferensial. Kami menerjemahkan tidak adanya pemimpin dalam gerombola, seperti gerombolan, gerombolan hewan yang terjadi di alam dengan kesetaraan diantara para persamaan diferensial dalam system persamaan (1). Pada bagian berikutnya, akan dipertimbangkan sistem linear 3 agen yang bergerak dalam formasi segitiga.

3. SSITEM LINIER 3 AGEN DENGAN FORMASI SEGITIGA

Pandang model sistem multi agen linear yang terdiri 3agen sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= A_3 \mathbf{x}_3 + B_3 \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Sebagai kejadian khusus dari model yang disajikan dalam (1) untuk kasus 3 agen, maka untuk $i=1,2,3$, A_i adalah matriks bertipe $n \times n$ dan B_i adalah matriks bertipe $n \times m$, \mathbf{x}_i mendeskripsikan keadaan agen ke- i dan \mathbf{u}_i mendeskripsikan kontrol untuk agen ke- i . Keadaan awal dan keadaan akhir para agen yang sudah diketahui disajikan berturut-turut sebagai berikut

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{m}_i, \quad \mathbf{x}_i(T) = \mathbf{s}_i, i = 1, \dots, 3. \quad (5)$$

Karena akan digunakan pendekatan kontrol optimum dengan Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai alat penyelesaian maka fungsional ongkos yang terkait adalah

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^3 \delta \mathbf{P} \mathbf{u}_i(t) \mathbf{P}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \frac{\gamma}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \mu \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 dt \quad (6).$$

Fungsi Hamilton yang diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4) dan (6) adalah

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i^T (A_i \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{u}_i) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \delta p_0 \delta \mathbf{P} \mathbf{u}_i(t) \mathbf{P}^2 \\
 & - \frac{1}{2} \gamma p_0 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} \\
 & - \frac{1}{2} \mu p_0 \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Dari fungsi Hamilton (7) diperoleh sistem Hamilton sebagai berikut

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{x}_i = A_i \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{u}_i; i = 1, \dots, 3. \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{p}_i = & \mathbf{p}_i^T A_i - \frac{1}{2} \gamma p_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \mu p_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Menurut Prinsip Maksimum Pontryagin, syarat perlu sistem mencapai maksimum adalah

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}_i} = 0 = B_i^T \mathbf{p}_i - \delta p_0 \mathbf{u}_i; \quad i = 1, \dots, 3.$$

Dari persamaan (8), (9) dan (10) diperoleh sistem persamaan diferensial

$$\mathbf{x}_i = A_i \mathbf{x}_i + B_i \frac{B_i^T \mathbf{p}_i}{\delta p_0}; i = 1, \dots, 3. \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_i = & \mathbf{p}_i^T A_i - \frac{1}{2} \gamma p_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \mu p_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \right) \quad (12)
 \end{aligned}$$

Sistem persamaan diferensial (11-12) harus diselesaikan guna mendapatkan persamaan trajektori \mathbf{x}_i . Persamaan pertama, yaitu persamaan (11) mempunyai syarat awal dan syarat akhir yang harus dipenuhi. Akan tetapi, syarat awal untuk persamaan kedua, yaitu persamaan (12), yang dikenal sebagai persamaan adjoin atau kostate, tidak mempunyai syarat awal. Kesulitan ini menimbulkan masalah klasik dalam kontrol optimum. Masalah klasik ini diselesaikan dengan metode steepest descent. Dalam sesi berikutnya, paper ini membahas salah satu metode alternatif untuk memecahkan masalah klasik dalam kontrol optimum ini.

4. METODE STEEPEST DESCENT

Untuk menyelesaikan masalah klasik di atas, metode konstruktif untuk mendapatkan pendekatan awal untuk variabel kostate perlu disajikan. Pertama-tama didefinisikan fungsional

$$F(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P} \mathbf{x}_i(T) - \mathbf{s}_i \mathbf{P}^2$$

dengan $\mathbf{x}_i(T)$ adalah evaluasi \mathbf{x}_i pada saat T jika diambil $(\mathbf{p}_1(0), \mathbf{p}_2(0), \mathbf{p}_3(0)) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ dan \mathbf{s}_i syarat akhir yang harus dipenuhi dan sudah diketahui dari sistem persamaan diferensial (11)-(12). Selanjutnya nilai fungsional F kita minimumkan dengan menerapkan metode *Steepest Descent*. Algoritma metode ini dapat dituliskan sebagai berikut. Pertama, ambil sebarang bilangan positif ε, α dan sebarang vektor $\mathbf{q}_i^0 \in \mathbf{R}^n$ untuk $i = 1, 2, 3$. Menggunakan nilai-nilai ini dan syarat awal $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{m}_i$ untuk $i = 1, 2, 3$, kita dapat menyelesaikan masalah syarat awal dari sistem persamaan (11)-(12) where $(\mathbf{x}_i(0), \mathbf{p}_i(0)) = (\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i^0)$ for $i = 1, 2, 3$. Di lain pihak, kita dapat menghitung keadaan akhir $\mathbf{x}(T)$ untuk nilai syarat awal $(\mathbf{q}_1^0, \mathbf{q}_2^0, \mathbf{q}_3^0)$. Lebih lanjut, menggunakan $\mathbf{x}_i(T)$, kita dapat menghitung (13) untuk memmtukan nilai skalar dari $F(\mathbf{q}_1^0, \mathbf{q}_2^0, \mathbf{q}_3^0)$. Berikutnya, kita akan menentukan $\mathbf{q}_1^1, \mathbf{q}_2^1, \mathbf{q}_3^1$ yang membuat $F(\mathbf{q}_1^1, \mathbf{q}_2^1, \mathbf{q}_3^1)$ lebih kecil daripada $F(\mathbf{q}_1^0, \mathbf{q}_2^0, \mathbf{q}_3^0)$. Untuk menyederhanakan notasi, kita notasikan $(\mathbf{q}_1^k, \mathbf{q}_2^k, \mathbf{q}_3^k)$ dengan \mathbf{q}^k . Untuk memudahkan pemahaman, kita misalkan variabel keadaan untuk agen pertama adalah y_1, y_2 , variabel keadaan untuk agen kedua adalah y_3, y_4 , dan variabel keadaan untuk agen ketiga adalah y_5, y_6 . Selanjutnya, misalkan lagi variabel kostate untuk agen pertama adalah p_1, p_2 , variabel kostate untuk agen kedua adalah p_3, p_4 , dan variabel kostate untuk agen ketiga adalah p_5, p_6 . Jadi diperoleh $\mathbf{x} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ dan $\mathbf{q}^0 = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Derivatif parsial

dari $F(p_1, p_2, L, p_6)$ terhadap p_i di \mathbf{q}^0 dapat didekati dengan

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}(\mathbf{q}^0) \approx D_1 = \frac{F(\mathbf{q}^0 + \varepsilon(1, 0, 0, 0, 0, 0)) - F(\mathbf{q}^0)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2}(\mathbf{q}^0) \approx D_2 = \frac{F(\mathbf{q}^0 + \varepsilon(0, 1, 0, 0, 0, 0)) - F(\mathbf{q}^0)}{\varepsilon}$$

L

$$\frac{\partial F}{\partial p_6}(\mathbf{q}^0) \approx D_6 = \frac{F(\mathbf{q}^0 + \varepsilon(0, 0, 0, 0, 0, 1)) - F(\mathbf{q}^0)}{\varepsilon}$$

Jadi gradien F di \mathbf{q}^0 dapat diaproksimasi oleh

$$\nabla F(\mathbf{q}^0) = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}(\mathbf{q}^0), \frac{\partial F}{\partial p_2}(\mathbf{q}^0), L, \frac{\partial F}{\partial p_6}(\mathbf{q}^0) \right) \approx (D_1, D_2, L, D_6)$$

Selanjutnya, kita set

$$E_1 = F(\mathbf{q}^0 - \alpha(D_1, D_2, L, D_6))$$

$$E_2 = F\left(\mathbf{q}^0 - \frac{\alpha}{2}(D_1, D_2, L, D_6)\right)$$

Jika $E_1 < E_2$ maka diambil

$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 - \alpha(D_1, D_2, L, D_6)$. Jika tidak memenuhi, maka kita ambil

$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q}^0 - \frac{\alpha}{2}(D_1, D_2, L, D_6)$ dan substitusi ε

dengan $\frac{\varepsilon}{2}$ dan substitusi α dengan $\frac{\alpha}{2}$.

Berikutnya kita mulai lagi dengan mengganti \mathbf{q}^1 dengan \mathbf{q}^2 dengan cara yang sama. Karena \mathbf{q}^1 menotasikan $(\mathbf{q}_1^1, \mathbf{q}_2^1, \mathbf{q}_3^1)$ dan \mathbf{q}^2 menotasikan $(\mathbf{q}_1^2, \mathbf{q}_2^2, \mathbf{q}_3^2)$ dan seterusnya serta jika proses ini kita ulang-ulang akan diperoleh barisan vektor $\{\mathbf{q}_1^m\}_{m=0}^{\infty}, \{\mathbf{q}_2^m\}_{m=0}^{\infty}$ dan $\{\mathbf{q}_3^m\}_{m=0}^{\infty}$. Bukti matematis kekonvergenan barisan-barisan vektor tersebut dapat ditemukan dalam [10].

5. HASIL SIMULASI

Berikutnya hasil simulasi sistem multi agen dengan formasi segitiga akan disajikan. Dalam simulasi ini, untuk $i=1,2,3$, matriks A_i dan B_i dipilih sebagai berikut

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alasan pemilihan matriks-matriks di atas adalah bila matriks-matriks tersebut disubstitusikan dalam (4) akan menjadi sistem yang terkontrol. Dengan pertimbangan keadaan awal dan akhir dari para agen membentuk formasi segitiga sama sisi, maka syarat awal dan akhir untuk agen satu dipilih sebagai berikut

$$\mathbf{x}_1(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1(T) = \begin{pmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Syarat awal dan akhir untuk agen kedua diambil sebagai berikut

$$\mathbf{x}_2(0) = \begin{pmatrix} y_3(0) \\ y_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(T) = \begin{pmatrix} y_3(T) \\ y_4(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.86025 \end{pmatrix}$$

Untuk agen ketiga, syarat awal dan akhirnya diketahui sebagai berikut

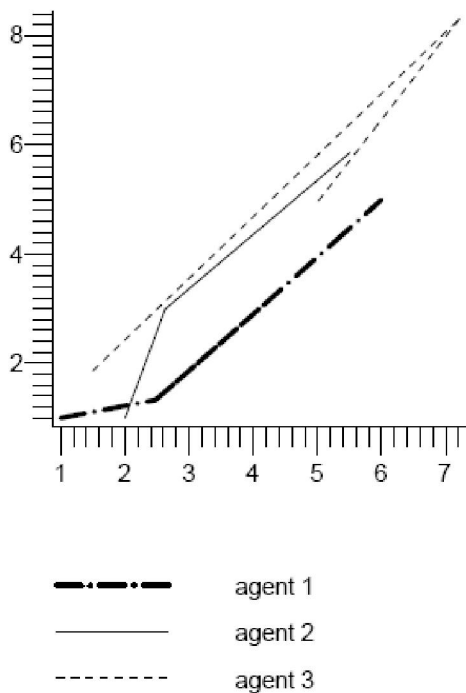
$$\mathbf{x}_3(0) = \begin{pmatrix} y_5(0) \\ y_6(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.86025 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(T) = \begin{pmatrix} y_5(T) \\ y_6(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Setelah menyelesaikan perhitungan untuk masing-masing agen secara numerik, maka trajektori optimum masing-masing agen dapat ditentukan dan hasilnya disajikan dalam Gambar 1.

6. KESIMPULAN

Dari hasil simulasi yang dihasilkan tampak bahwa untuk kasus model multiagen linear dengan tiga agen, pemodelan dengan model usulan dapat dilakukan sesuai dengan harapan yaitu para agen berpindah dari keadaan awal menuju ke keadaan akhir. Model yang diusulkan berupa sistem persamaan diferensial linear orde satu, suatu model yang dipandang sebagai suatu sistem dinamis yang sederhana dan akrab di kalangan ilmuwan dan pengguna

matematika dapat dipandang atau dimaknai sebagai model multi agen linear.



Gambar 1. Trajektori optimum untuk tiga agen

Persyaratan bahwa para agen harus bergerak tidak boleh bertabrakan dan menjauh satu sama lain dapat dipenuhi dengan mendefinisikan fungsional ongkos J . Hasil simulasi yang ditampilkan dalam Gambar 1 harus diakui masih relatif kasar. Hasil ini disebabkan pengambilan atau pemilihan matriks-matriks A_i dan B_i yang hanya mempertimbangkan syarat sistem menjadi sistem linear yang terkontrol. Untuk menerapkan model usulan pada model wahana transportasi selain syarat keterkontrolan, kita harus menggunakan matriks-matriks matriks A_i dan B_i yang merupakan hasil linearsasi dari model sistem dinamis suatu wahana, harapannya, hasil trajektori merupakan hasil yang lebih halus.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Breder,C.M., (1954), Equation Descriptive of Fish schools and Other animal aggregation, *Ecology*, vol.35, pp. 361-370.

[2] Gazi,V. and Passino,K.M., (2003), Stability Analysis of Swarms, *IEEE Transaction On Automatics Control*, vol. 48, pp. 692-697.

[3] Huse,D., Railsback,S. and Ferno,A., (2002), Modeling Changes in Migration Pattern of Herring: Collective Behavior And Numerical Domination, *Journal of Fish Biology*, vol.60, pp. 571-582.

[4] Keshet,L.E., (2001), *Mathematical Models of Swarming and Social Aggregation*, The 2001 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA 2001), Miyagi, Japan Oct 28- Nov 1.

[5] Mogilner, A. dan Keshet,L.E., (1999), A Non-Local Model for A Swarm, *Journal of Mathematical Biology*, vol.38, pp. 534-570.

[6] Shi, H., Wang, L. and Chung, T., (2004), Swarming Behavior of Multi-Agent System, *Journal Control Theory and Application*, vol 2, pp. 313-318.

[7] Slotte,A. and Fiksen,O., (2000), State-Dependent Spawning Migration in Norwegian Spring-spawning Herring, *Journal of Fish Biology*, vol.56, pp. 138-162.

[8] Topaz, C.M. dan Bertozzi, A.L., (2004), Swarming Pattern In A Two-Dimensional Kinematics Model For Biological Groups, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol.65, pp. 152-174.

[9] Warburton, K. dan Lazarus,W., (1991), Tendency-distance model of social Cohesion In Animal Group, *Journal of Theoretical Biology*, vol.150, pp. 473-488.

[10] Tjahjana, H., Pranoto, I., Muhammad, H., dan Naiborhu, J., (2009), On the Optimal Control Computation of Linear Systems, *Journal of the Indonesian Mathematical Society (MIHMI)*, Volume 15, Nomor 1, pp. 13-20.

