MATRIKS RELASI PREFERENSI FUZZY TERITLAK DAN APLIKASINYA UNTUK PEMBUATAN KEPUTUSAN

Siti Khabibah[1], Farikhin[2], dan Nikken Prima P[3]
[1,2,3] Departemen Matematika FSM Undip
JL. Prof. Soedarto Kampus UNDIP Tembalang Semarang 50275

Abstract. In the paper, we explore Dempster-Shaver's theory and fuzzy preference relations for a decision making. Firstly, we discuss some necessary anf suficient conditions for constructing additive consistency fuzzy preference relation. With respect to the Deng et. al.'s work, we combined these to construct a method for decision making. Finally, two examples are presented as illustrations of the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Fungsi D, *relasi preferensi fuzzy*, teori Dempster-Shaver .

1. PENDAHULUAN

Pembuatan keputusan merupakan aktivitas sehari-hari yang sering dilakukan. Pada situasi tertentu, pengambil keputusan tidak dapat memberikan penilaian untuk kriteria yang telah ditetapkan. Keadaan ini dapat disebabkan oleh penguasaan atau kepakaran pengambil keputusan yang berbeda dengan problem yang dihadapi. Selanjutnya, keadaan ini akan berdampak pada pemilihan alternatif keputusan yang tidak optimal.

Relasi preferensi *fuzzy* dapat digunakan untuk pembuatan keputusan individu ataupun berkelompok. Setiap pembuat keputusan dimintakan penilaiannya, kemudian penilaian tersebut diagregasi dengan aturan tertentu [1]. Beberapa metode menentukan prioritas keputusan berdaraskan relasi preferensi fuzzy diusulkan oleh para peneliti. Kajian ini dapat dilihat dalam ([2], [3], [4] , [5])

Dalam makalah ini, diusulkan suatu metode mendapatkan prioritas keputusan menggunakan relasi preferensi *fuzzy* tergeneralisir. Metode ini merupakan modifikasi dari algoritma yang diusulkan dalam (Deng dkk., 2014). Prosedur yang diusulkan relatif lebih sederhana dan dapat dilakukakan komputasinya dengan mudah.

2. RELASI PREFERENSI FUZZY

Pada bagian ini, dibahas syarat cukup dan syarat perlu agar relasi preferensi fuzzy bersifat konsisten aditif. Untuk

pembahasan lebih lanjut mengenai hal ini dapat dilihat dalam ([1], [6], [7])

Definisi 2.1 [7] *Diberikan himpunan berhingga alternatif keputusan* $= \{\ ,\ ,\dots,\ \}$. *Fungsi* $:\ \times\ \rightarrow [0,1]$ *dinamakan **Relasi preferensi fuzzy (RPF)** jika untuk setiap* $,\ = 1,2,\dots,$ *memenuhi*

(i). $(\ ,\ ) = 0{,}5$

(ii). $,\ +\ ,\ = 1.$

Matriks $= \begin{pmatrix} , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \\ & & & \\ , & , & \cdots & , \end{pmatrix}$

dengan $_{,} =\ ,\ ,$ dinamakan **matriks RPF**. Sebagai contoh, matriks

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}72 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}28 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}87 & 0{,}67 & 0{,}4 & 0{,}77 \\ 0{,}13 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}03 & 0{,}4 \\ 0{,}33 & 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}23 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}97 & 0{,}77 & 0{,}5 & 0{,}87 \\ 0{,}23 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}13 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

keduanya merupakan matriks RPF. Untuk selanjutnya, relasi preferensi fuzzy selalu ditulis dalam bentuk matriks RPF.

Bilangan $_{,} =\ ,$ dapat diartikan sebagai derajat preferensi alternatif A atas alternatif A . Jika

$_{,} = \quad , \quad > 0{,}5$, maka alternatif keputusan A lebih disukai untuk dipilih dibandingkan alternatif keputusan A . Jika $_{,} = \quad , \quad < 0{,}5$, maka alternatif keputusan lebih disukai untuk dipilih dibandingkan alternatif keputusan A . Jika $_{,} = \quad , \quad = 0{,}5$, berarti tidak ada perbedaan antara alternatif keputusan dan .

Definisi 2.2 *Diberikan matriks* = *dengan* $0 \leq \ _{,} \leq 1$ *dikatakan* ***konsisten aditif*** *jika*

$$_{,} + \ _{,} + \ _{,} = \frac{3}{2}$$

untuk setiap $, , = 1, 2, \ldots, .$

Jika = = maka $_{,} = -$. Jika = maka $_{,} + \ _{,} + \ _{,} = -$ atau $_{,} + \ _{,} = 1$. Hal ini berarti, setiap matriks aditif konsisten merupakan matriks RPF. Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa matriks

$$= \begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{matrix}$$

merupakan matriks RPF yang bersifat konsisten aditif.

Dua teorema berikut memperlihatkan syarat perlu dan syarat cukup agar matriks RPF bersifat konsisten aditif. Untuk pembuktiannya dapat dilihat dalam referensi yang dimaksud.

Teorema 2.3 [7] *Diberikan matriks RTF* = . *Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen*

(1). *Matriks R bersifat aditif*

(2). $_{,} + \ _{,} + \ _{,} = -$ *untuk setiap* $< \ <$

(3). $_{,} + \ _{,} + \ _{,} = -$ *untuk setiap* $\leq \ \leq$

(4). $_{,} + \ _{,} + \ + \ _{,} + \ _{,} =$ —— *untuk setiap* $<$.

Teorema 2.4 [8] *Diberikan matriks RPF* = *dan* = *dengan*

$$_{,} = \frac{1}{-} \quad _{,} + \ _{,} \quad - \frac{1}{2}$$

untuk setiap $1 \leq \ , \ \leq$. *Matriks RPF mempunyai sifat konsisten aditif jika dan hanya jika* = .

3. MATRIKS RPF TERITLAK

Pada bagian ini, dibahas suatu bentuk pengitlakan matriks RPF. Bentuk pengitlakan ini merujuk pada referensi ([9], [10]). Pengitlakan relasi preferensi fuzzy menggunakan teori Dempster-Shaver.

Teori Dempster-Shaver dibentuk berdasarkan dua ukuran tak linear, yakni **ukuran belief** dan **ukuran plausability**. Pembahasan mendalam mengenai hal ini dapat dilihat dalam ([11], [12]).

Diberikan himpunan tak kosong dan 2 koleksi semua subset . Fungsi dari 2 ke interval [0,1] dinamakan **fungsi BPA** jika memenuhi dua syarat berikut

$$(\ ) = 0 \tag{3.1}$$

$$(\ ) = 1 \tag{3.2}$$

Fungsi $: 2 \rightarrow [0,1]$ dinamakan fungsi massa. Elemen 2 dinamakan **elemen vokal** jika $0 < \ (\ ) \leq 1$. Jika adalah himpunan semua elemen vokal, pasangan (,) dinamakan *body of evidence*.

Fungsi BPA merupakan bentuk pengitlakan dari teori probabilitas. Dalam teori probabilitas, ukuran/peluang bersifat monoton, aditif, dan $(X) = 1$. Ketiga sifat ini, belum tentu berlaku untuk fungsi BPA. Lebih lanjut, hubungan kejadian (*event*) dan tidak dijelaskan secara eksplisit oleh fungsi BPA.

Berdasarkan fungsi BPA ini didefinisikan **ukuran belief** (*Bel*) dan **ukuran plausibility** (*Pl*) sebagai berikut

$$(\ ) = \quad (\ )$$

dan

$$(\ ) = \quad (\ )$$

$$\cap$$

untuk setiap 2 . Nilai ( ) merepresentasikan nilai kepercayaan elemen berada di dalam atau sebarang subset . Untuk ukuran plausability, ( ) merepresentasikan kegagalan menghendaki kejadian (*event*) tidak terjadi.

Fungsi BPA dapat diitlakkan dengan cara sebagai berikut, fungsi $: 2 \to [0,1]$

$$(\ ) = 0$$

$$(\ ) \leq 1 \qquad (3.3)$$

Fungsi $: 2 \to [0,1]$ yang memenuhi (3.1) dan (3.3) disebut **fungsi-D**. Jelas bahwa jika (3.2) berlaku maka (2.3) juga berlaku. Dengan kata lain, setiap fungsi BPA merupakan fungsi-D, tetapi tidak berlaku sebaliknya [9].

Tinjau $= \{ \ , \ , \dots, \ \}$ himpunan hingga dan $: 2 \to [0,1]$ dengan

$$= \quad > 0$$

untuk $= 1, 2, \dots,$ dan

$$\leq 1$$

Matriks **relasi preferensi fuzzy teritlak (RPFT)** didefinisikan (Deng, 2012; Deng dkk., 2014)

$$= \begin{pmatrix} , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

dengan

$$_{,} = \ 1 - {}^{(,)}, {}^{(,)}, \dots, 1 - {}^{(,)}, {}^{(,)}$$

dan

$$_{,} = \ 1 - {}^{(,)}, {}^{(,)}, \dots, 1 - {}^{(,)}, {}^{(,)}$$

untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$ dan

$$0 \leq {}^{(,)} \leq 1.$$

Tinjau matriks RPF

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & , & \cdots & , \\ , & 0{,}5 & \cdots & , \\ , & , & \cdots & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

dengan $_{,} + {}_{,} = 1$. Jika ditulis dalam bentuk matriks RTFT maka

$$= \begin{pmatrix} (0{,}5, 1) & {}_{,}, 1 & \cdots & {}_{,}, 1 \\ {}_{,}, 1 & (0{,}5, 1) & \cdots & {}_{,}, 1 \\ {}_{,}, 1 & {}_{,}, 1 & \cdots & (0{,}5, 1) \end{pmatrix}$$

4. APLIKASI PADA PEMBUATAN KEPUTUSAN

Pada bagian ini, dibahas mengenai aplikasi relasi preferensi fuzzy dan bentuk itlaknya untuk pembuatan keputusan. Metode yang diusulkan merupakan bentuk pengembangan dari metode yang diusulkan oleh [10].

Misalkan $= \{ \ , \ , \dots, \ \}$ himpunan alternatif keputusan. Keputusan cenderung lebih dipilih daripada keputusan , dinotasikan dengan . Akibatnya, ini berarti $, >$ 0,5. Idealnya, analisis pembuatan keputusan harus dapat menghasilkan suatu prioritas keputusan

dengan $, \ , \ , \dots,$ merupakan permutasi dari $= \{ \ , \ , \dots, \ \}$. Teorema berikut memperlihatkan hubungan relasi preferensi fuzzy yang konsisten aditif dengan prioritas keputusan.

Teorema 4.1 [1] *Diberikan himpunan n alternatif keputusan* $= \{ \ , \ , \dots, \ \}$, *relasi preferensi fuzzy (RPF) , jika RPF konsisten aditif maka terdapat prioritas keputusan,* *dengan* $\quad , \quad , \quad , \ldots ,$ *adalah permutasi dari alternatif keputusan* $= \{ \quad , \quad , \ldots , \quad \}$.

Berdasarkan Teorema 2.2., Teorema 4.1 dan matriks RTFT, dibuat suatu metode pembuatan keputusan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Metode Pembuatan Keputusan RTFT
Input : n keputusan $= \{ \quad , \quad , \ldots , \quad \}$
Output : prioritas keputusan

(1) **Menyusun matriks RPFT**

$$= \begin{matrix} , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \\ \\ , & , & \cdots & , \end{matrix}$$

(2) **Menentukan matriks integral**

$$= \begin{matrix} , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \\ \\ , & , & \cdots & , \end{matrix}$$

dengan

$$_{,} = \quad _{,} = \quad (\,,\,) \quad (\,,\,) .$$

Matriks integral F ini merupakan matriks relasi preferensi fuzzy.

(3) **Transformasikan matriks integral pada langkah (2) ke matriks RPF yang konsisten**

$$= \begin{matrix} , & , & \cdots & , \\ , & , & \cdots & , \\ \\ , & , & \cdots & , \end{matrix}$$

dengan

$$_{,} = \frac{1}{\quad} \quad _{,} + \quad _{,} \quad - \frac{1}{2}$$

untuk setiap $1 \leq \; , \; \leq \; .$

(4) **Menentukan vektor prioritas non-negatif** $= (\quad , \quad , \ldots , \quad)$ untuk matriks pada Langkah (3), dengan rumus

$$= \frac{2}{\quad} \quad _{,}$$

untuk setiap $= 1, 2, \ldots , \; .$

Terdapat beberapa cara untuk penentuan vektor prioritas dari matriks RTF. Dalam makalah ini, penentuan vektor prioritas menggunakan rumus seperti yang diusulkan dalam [5]. Untuk pembahasan metode penentuan vektor prioritas dapat dilihat dalam ([3], [5], [2]).

Contoh 4.1 Diberikan problem pembuatan keputusan berkelompok dengan tiga alternatif keputusan, katakan $= \{ \quad , \quad , \quad \}$. Matriks relasi preferensi fuzzy teritlak

$$= \begin{matrix} \{(1, 0{,}5)\} & \{(1, 0{,}1)\} & \{(0{,}8, 0{,}7), (0{,}2, 0{,}8)\} \\ \{(1, 0{,}9)\} & \{(1, 0{,}5)\} & \{(1, 0{,}8)\} \\ \{(0{,}8, 0{,}3), (0{,}2, 0{,}2)\} & \{(1, 0{,}2)\} & \{(1, 0{,}5)\} \end{matrix}$$

Akan ditentukan prioritas keputusan problem ini diselesaikan denganmetode PK-RTFT. Selanjutnya, ditentukan matriks integral $= \begin{matrix} , & , & , \\ , & , & , \\ , & , & , \end{matrix}$ dengan

- $_{,} = \; _{,} = \; _{,} = 0{,}5$
- $_{,} = 1 \times 0{,}1 = 0{,}1$ dan $_{,} = 0{,}8 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}72$
- $_{,} = 1 \times 0{,}9 = 0{,}9$ dan $_{,} = 1 \times 0{,}8 = 0{,}8$
- $_{,} = 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}28$ dan $_{,} = 1 \times 0{,}2 = 0{,}2$

Jadi

$$= \begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}72 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}28 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{matrix}$$

Matriks ditransformasi ke bentuk matriks seperti pada Langkah (3) dalam Metode PK-RTFT. Dengan komputasi perangkat lunak MATLAB, diperoleh matriks

$$= \begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}2067 & 0{,}6133 \\ 0{,}7933 & 0{,}5 & 0{,}9067 \\ 0{,}3867 & 0{,}0933 & 0{,}5 \end{matrix}$$

Langkah (4) menentukan bobot masing-masing alternatif keputusan. Dengan formula seperti pada Langkah (4), $= \frac{}{} \sum \quad _{,} \; ,$ diperoleh bobot masing-masing alternatif keputusan yang disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1 Tabel bobot alternatif keputusan

Alternatif Keputusan ke-*i*	

1	0,2933
2	**0,4889**
3	0,2178

Nilai bobot dihitung menggunakan perangkat lunak MATLAB. Tabel 4.1. menunjukkan bahwa alternatif keputusan mempunyai bobot tertinggi, kemudian diikuti alternatif keputusan dan . Oleh karenanya, prioritas keputusan yang dihasilkan berdasarkan Metode adalah .

Matriks pada Contoh 4.1 diambil dari [10]. Analisis prioritas dari metode Deng dkk. menghasilkan vektor prioritas yang sama dengan metode PK-RTFT seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.2 Perbandingan prioritas keputusan

Alternatif keputusan	Peringkat	
	Metode PK-RPFT	Metode Deng dkk.
	2	2
	1	1
	3	3

Contoh 4.2 Diberikan problem pembuatan keputusan dari 5 alternatif keputusan = { , , ,A ,A }, dengan matriks RPF

$$= \begin{matrix} 0,5 & 0,87 & 0,67 & 0,4 & 0,77 \\ 0,13 & 0,5 & 0,3 & 0,03 & 0,4 \\ 0,33 & 0,7 & 0,5 & 0,23 & 0,6 \\ 0,6 & 0,97 & 0,77 & 0,5 & 0,87 \\ 0,23 & 0,6 & 0,4 & 0,13 & 0,5 \end{matrix}$$

Matriks RPF ini diperoleh dari referensi ([10], [13]).

Jika metode PK-RPFT digunakan pada problem ini, maka langkah (1) dan (2) dapat diabaikan dan langsung ke langkah (3) dan (4), sehingga diperoleh matriks

$$= \begin{matrix} 0,5 & 0,87 & 0,67 & 0,4 & 0,77 \\ 0,13 & 0,5 & 0,3 & 0,03 & 0,4 \\ 0,33 & 0,7 & 0,5 & 0,23 & 0,6 \\ 0,6 & 0,97 & 0,77 & 0,5 & 0,87 \\ 0,23 & 0,6 & 0,4 & 0,13 & 0,5 \end{matrix}$$

dan vektor prioritas

=
[0,2568 0,1088 0,1888 , 0,1488] .

Berdasarkan vektor bobot , diperoleh prioritas keputusan

Seperti halnya Contoh 4.1., komputasi matriks dan vektor menggunakan perangkat lunak MATLAB.

Dalam Contoh 4. 2. ini, perlu dicatat bahwa = . Hal ini disebabkan matriks RPF bersifat konsisten aditif. Teorema 2. 2 menjamin bahwa = jika dan hanya matriks bersifat konsisten aditif.

Misalkan metode A menyatakan metode mencari vektor prioritas seperti yang diuraikan dalam [10] dan metode B menyatakan metode untuk mencari vektor prioritas seperti yang diuraikan dalam [5]. Jika metode C menyatakan metode PK-RPFT untuk mencari vektor prioritas maka perbandingan hasil perhitungan vektor prioritas tersebut ditulis dalam tabel berikut.

Tabel 4.3 Perbandingan prioritas Contoh 4.2

Metode	Vektor prioritas
A	[0,271 0,086 0,186 , 0,136]
B	[0.260 0.110 0.190 , 0,150]
C	[0,257 0,109 0,1898 , 0,149]

Tabel 4.3 memperlihatkan bahwa prioritas keputusan yang dihasilkan dari ketiga metode adalah sama. Ketiga metode tersebut memberi hasil analisis yang sama, yakni alternatif keputusan A merupakan alternatif keputusan terbaik dari himpunan keputusan = { , , ,A ,A }.

6. PENUTUP

Pada makalah ini, dikaji suatu bentuk relasi preferensi yang merupakan pengitlakan relasi preferensi fuzzy. Relasi yang dimaksud adalah relasi preferensi yang dibangun berdasarkan fungsi-D. Suatu prosedur peembuatan keputusan telah dihasilkan berdasarkan matriks preferensi fuzzy teritlak. Prosedur ini dapat meningkatkan nilai konsistensi. Selain itu, prosedur tersebut mudah diimplimentasikan dari aspek numeriknya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada FSM Undip yang telah mendanai penelitian sehingga dapat menghasilkan makalah ini melalui DIPA Fakultas Sains dan Matematika (FSM) Universitas Diponegoro dengan Kontrak No. 2391/UN7.3.8/PG/2015. Beberapa bagian dalam makalah ini telah dipresentasikan pada seminar nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMP Purwokerto 2015.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gong, Z., Lin, Y., and Yao, T, (2013), *Uncertain fuzzy preference relation,*: Berlin : Springer.

[2] Fedrizzi, M., and Brunelli, M., (2010), On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix, *Soft Computing*, 14: 639-645.

[3] Lee, Li-Wei, (2012), Group decision making with incomplete fuzzy preference relastion based on the additive consistency and the order consistency, *Expert systems with applications*, 39: 11666-11676.

[4] Xu, Zeshui, and Da, Qingli, (2005), S Least deviation method to obtain a priority vector of a fuzzy preference relation, *European Journal of Operation research*, 164 : 206-216.

[5] Liu, X., Pan, Y., Xu, Y., and Shui Yu, (2012), Least square completion and inconsistency repair methods for additively consistent fuzzy preference relations, *Fuzzy sets and systems* 198: 1-19.

[6] Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., and Luque, M, (2004), Some issues of fuzzy preferency relation, *European Journal of Operational Research*, 154 : 98–109.

[7] Tanino, T., (1984), Fuzzy preference orderings in group decision making, *Fuzzy sets and Systems*, 12 : 117-131.

[8] Farikhin, Siti Kahbibah, and Nikken Prima P, 2016, A note on fuzzy relation preferences, submitted.

[9] Deng. Y. (2012). D Numbers : Theory and its applications, *Journal of Information & Computational Science*, 9 : 2421-2428.

[10] Deng, X., Hu, Y., Deng, Y., and Mahadevan, S., (2014), Supplier selection using AHP methodology extended by D numbers, *Expert Systems with Applications*, 41:156-167.

[11] Shafer, G., (1976), *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press : New Jersey.

[12] Klir, G.J., and Weirman, M.J., (1999), *Uncertainity-Based Information*, Berlin : Springer.

[13] Chen, Y.H., and Chao, R.J., (2012), Supplier selection using consistent fuzzy preference relations, *Expert Systems with Applications*, 39, :3233–3240.