DIMENSI PARTISI *n*GRAF AMALGAMASI BINTANG YANG DIHUBUNGKAN SUATU LINTASAN

Asmiati
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung
asmiati308@yahoo.com

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a connected graph, vertex $v \in V(G)$, and $S \subset V(G)$. For an ordered k-partition, $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, the representation v with respect to π is the k-vector $r(v|\pi))$, $v \in V(G)$, are distinct. The minimum k for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is the partition dimension of G, denoted by $pd(G)$. In this paper, we determine the partition dimension for certain amalgamation of stars, namely $nS_{k,m}$.

Keywords: resolving partition, partition dimension, amalgamation of stars.

1. PENDAHULUAN

Dimensi partisi pada suatu graf diperkenalkan [1] pada tahun 1998. Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat dari dimensi partisi pada suatu graf yang diambil dari [2].

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v kehimpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah, $min\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_k$ kelas-kelas dari π. Representasi v terhadap π, dinotasikan dengan $r(v|\pi)$, adalah k-tupel terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Selanjutnya, π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\pi) \neq r(v|\pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G, dinotasikan $pd(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas.

Dimensi partisi untuk sebarang graf belum dapat ditentukan, jadi belum terdapat formula umum untuk dimensi partisi sembarang graf, demikian halnya juga untuk pohon. Pada [1] telah didapatkan dimensi partisi pada beberapa kelas graf diantaranya, lintasan, graf bintang ganda, graf ulat, lingkaran, graf lengkap, graf bipartite lengkap. Asmiati [3] telah mendapatka ndimensi partisi pada graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Baskoro dan Darmaji [4] berhasil mendapatkan dimensi partisi dari operasi perkalian korona dua buah graf. Tomescu [5] telah berhasil mengkarakterisasi graf berorde n≥ 9 berdimensi partisi (n-2). Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian tentang dimensi partisi dari n buah graf amalgamasi bintang yang dihubungkan suatu lintasan. Pada paper ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Amalgamasi bintang, $S_{m,k}$ dengan $k \geq 1$, $m \geq 2$ adalah graf yang diperoleh dari (m-1) buah graf bintang S_{k+1}, dengan cara menyatukan sebuah daun dari setiap graf S_{k+1}. Titik penyatuan tersebut sebagai titik pusat $S_{m,k}$. Misalkan terdapat n buah $S_{m,k}$, yang mana setiap pusat $S_{m,k}$ dihubungkan oleh suatu lintasan. Selanjutnya, subdivisi dua titik pada lintasan yang berada diantara dua $S_{m,k}$, maka diperoleh graf $nS_{m,k}$.

Misalkan titik pusat untuk setiap $S_{m,k}$, dinotasikan dengan m_i, i = 1,2,…,n . Titik yang berjarak satu dari m_i, i = 1,2,…,n, disebut titik tengah, dinotasikan dengan l_t^i, i = 1,2,…,n ; t = 1,2,…,(m-1). Daun ke- j dari titik tengah l_t^i, dinotasikan dengan l_{tj}^i, j = 1,2,..,k. Titik-titik hasil subdivisi lintasan dinotasikan dengan x_i, i = 1,2,…,n. Berikut ini adalah lemma yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi batas bawah dari dimensi partisi graf.

Lemma 2.1 [1] *Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda π dari V(G), untuk u,v∈ V(G), jika d(u,w) = d(v,w) untuk setiap w ∈V(G) – {u,v}, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari π.*

Bukti:

Misalkan π partisi pembeda dari *V(G)* dan andaikan $u = v$. Oleh karena *d(u,w) = d(v,w)* untuk setiap $w \in V(G$, maka $r(u|\pi) = r(v|\pi)$. Kontradiksi dengan π partisi pembeda dari *V(G),* jadi pengandaian salah. ■

Pada bagian ini akan didiskusikan dimensi partisi pada graf $nS_{m,k}$.

Teorema 2.2 *Dimensi Partisi Graf* $nS_{m,k}$ *dengan k≥1, m ≥2 adalah :*

$$pd(nS_{m,k}) = \begin{cases} k, & 1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor \\ k+1, & lainnya \end{cases}$$

Bukti :

a. Kasus $1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$

Akan ditentukan batas bawah dimensi partisi pada graf $nS_{m,k}$ untuk $1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$. Karena setiap titik di l_{tj}^i dengan t = 1,2,3,..., (m-1) bertetangga dengan k daun, maka berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $pd(nS_{m,k}) \ge k$.

Batas atas dimensi partisi graf $nS_{m,k}$ untuk $1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$, misalkan :

a. $S_1 = \left\{x_i \;\middle|\; i \in \left[1, \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor\right]\right\}$

b. $S_2 = \left\{m_i \;\middle|\; i \in \left[1, \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor\right]\right\}$

c. Titik-titik pada l_t^i untuk i = 1,2,3,..., $\left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ dan t = 1,2,3,..., (m-1) berturut-turut masuk ke dalam kelas partisi $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$.

d. Daun-daun pada l_{tj}^i merupakan kombinasi dari kelas-kelas partisi $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$,

Karena representasi dari setiap titik pada graf $nS_{m,k}$. Untuk k ≥ m dan $1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ adalah berbeda, sehingga $pd(nS_{m,k}) \le k$. Akibatnya $pd(nS_{m,k}) \le k$ untuk $1 \le n \le \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$.

b. Kasus *n* lainnya

Akan ditentukan batas bawah graf $nS_{m,k}$ untuk $n \ge \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$. Karena setiap titik l_t^idengan t = 1,2,3,... , (m-1) dan i = 1,2,3,...,n bertetangga dengan k daun, maka berdasarkan Lemma 2.1, diperoleh $pd(nS_{m,k}) \ge k$. Andaikan titik-titik pada graf $nS_{m,k}$ dipartisi menjadi k partisi yaitu $\pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$. Akibatnya terdapat daun-daun pada l_{tj}^i untuk suatu t dan $j = 1,2,3,..,k$ (misalnyal_{ts}^idanl_{tp}^i , $s \ne p$) akan masuk kedalam kelas partisi yang sama. Sehingga $r(l_{ts}^i \mid \pi) = r(l_{tp}^i \mid \pi)$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $pd(nS_{m,k}) \ge k + 1$ untuk $n \ge \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$.

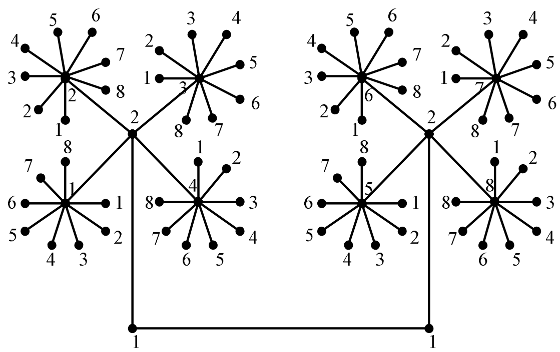
Selanjutnya ditentukan batas atas $pd(nS_{m,k})$. Untuk menunjukkan $pd(nS_{m,k}) \le k+1$. Misalkan $\pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$. Himpunan titik-titik di $V(nS_{m,k})$ untuk $n \ge \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ dipartisi sebagai berikut :

a. $S_1 = \{l_{11}^1\}$
b. $S_2 = \{m_i \mid i \in [1,n]\}$
c. $S_3 = \{x_i \mid i \in [1,n]\}$
d. Titik-titik pada l_t^i untuk i = *1,2,3,...,n* dan t = *1,2,3,..., (m-1)* berturut-turut masuk ke dalam kelas partisi $\{S_2, S_3, \dots, S_k\}$

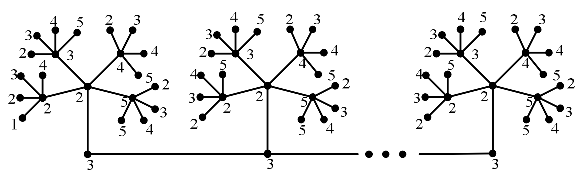
Daun-daun pada l_{tj}^i, kecualil_{11}^1 merupakan kombinasi dari kelas-kelas partisi $\{S_2, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$. Terdapat satu titik yang terdapat pada kelas partisi pertama dan titik tersebut merupakan titik ujung dari lintasan terpanjang pada graf $nS_{m,k}$. Akibatnya representasi dari semua titik pada graf $nS_{m,k}$ adalah berbeda.

Sehingga diperoleh $pd(nS_{m,k}) \leq$ k+1. Akibatnya $pd(nS_{m,k}) =$ k+1, untuk n $\geq \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$. ■

Berikut ini diberikan contoh graf dengan partisi pembedanya.



Gambar 2.1 Partisi Pembeda pada graf n $S_{5,8}$ untuk $1 \leq n \leq 2$.



Gambar 2.2 Partisi Pembeda pada graf $nS_{5,4}$ untuk n ≥ 1.

Pada Gambar 2.1 merupakan konstruksi batas atas dimensi partisi graf n$S_{5,8}$. Karena pada graf n$S_{5,8}$, nilai m=5 dan k = 8, maka $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{8}{5-1} \right\rfloor = 2$. Mendesain partisi pembeda setiap titik di n $S_{5,8}$ untuk $1 \leq n \leq 2$ mengikuti pembuktian Kasus (a).

Demikian juga halnya pada Gambar 2.2, merupakan konstruksi batas atas dimensi partisi graf $nS_{5,4}$ untuk n $\geq$ 1. Cara membentuk partisi pembeda titik-titik di graf $nS_{5,4}$ untuk n $\geq$ 1, mengikuti pembuktian pada Kasus (b).

3. PENUTUP

Dimensi partisi graf $nS_{m,k}$ dengan $k \geq 1$, $m \geq 2$ adalah k untuk $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{k}{m-1} \right\rfloor$ dan $(k + 1)$ untuk lainnya.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G., Salehi, E. danZang, P., (1998), On the partition dimension of a graph, *Congr. Numer*., 130, 157-168.

[2] Chartrand, G., Salehi, E. danZang, P., (2000), The partition dimension of a graph, *Aequationes Math*., 59, 45-54.

[3] Asmiati, Partition dimension of amalgamation of stars, (2012), *Bulletinof Mathematics*, 4 (2), 161-167.

[4] Baskoro, E. danDarmaji, (2012), The partition dimension of corona product of two graphs, *Far East J. Math. Sci*., 66(12), 181-196.

[5] Tomescu, I.,(2008), Discrepancies betweenmetric dimension and partition dimension of a connectedgraph, *Discrete Math.*, 308, 5026-5031.