

PENENTUAN TRAJEKTORI KERETA DUBIN MELALUI KONTROL OPTIMUM

R. Heru Tjahjana

Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

heru_tjahjana@undip.ac.id

Abstract. This paper addressed the control of a Dubin's vehicle. The Dubin's vehicle control design, using the Pontryagin Maximum Principle. The application of this principle, bring the matter to the Hamiltonian system with some partial equations excess conditions, while others do not have any conditions. The difference approach, which used in this paper to design of the control. This paper solve the problem by transforming the problem into the initial values problem, by finding the best approach to obtain the initial condition equations for some equations that do not have any conditions.

Keywords: dubin vehicle, Pontryagin Maximum Principle, initial values problem,

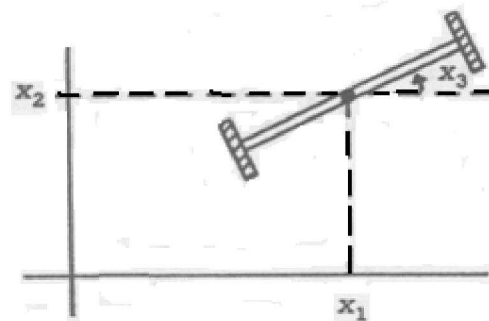
1. PENDAHULUAN

Kereta Dubin merupakan model yang sederhana namun menarik untuk dikaji. Alasan mengapa menarik adalah kendati kereta Dubin ini dimodelkan dalam bentuk yang sederhana, modelnya adalah model non linear. Bila model non linear ini dibawa ke model linear atau dilinearkan maka model tersebut tidak terkontrol [7], sehingga perancangan kendalinya harus dilakukan dengan model kereta dubin yang merupakan sistem yang tak linear. Penelitian yang berbasis pada kereta Dubin tetap menarik perhatian peneliti seperti yang disajikan dalam [1,3,5,7]. Penyelesaian masalah yang disajikan dalam paper ini menggunakan cara yang pendekatan yang berbeda dengan paper-paper tersebut. Perbedaannya adalah terletak pada perancangan kontrol yang nanti diberikan secara rinci pada sesi 4. Perancangan kontrol kereta Dubin pada sesi 4, menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Penerapan prinsip ini, membawa masalah pada sistem Hamilton yang sebagian persamaan kelebihan syarat, sedangkan yang lain tidak mempunyai syarat apapun. Tulian ini menyelesaikan masalah tersebut dengan mengubah permasalahan menjadi masalah syarat awal, dengan mencari pendekatan terbaik

untuk mendapatkan syarat awal persamaan yang tidak mempunyai syarat apapun tadi.

2. MODEL KERETA DUBIN

Perhatikan model kereta Dubin, yang variabel keadaannya diberikan dalam Gambar 1.



Gambar 1 Variabel keadaan kereta Dubin

Hubungan antar variabel keadaan yang digambarkan dalam Gambar 1, memenuhi hubungan yang disajikan dalam persamaan keadaan sebuah sistem non linear yang diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (1)$$

Variabel-variabel yang terlibat yang diajikan dalam Gambar 1 adalah x_1 , x_2 , yang secara fisis adalah posisi kereta Dubin di bidang dan variabel x_3 yang secara fisis dapat dimaknai sebagai orientasi Kereta Dubin.

Model yang disajikan dalam sistem (1) memiliki dua input atau kontrol yaitu u_1 dan u_2 . Variabel keadaan pada model yang disajikan dalam sistem (1) adalah x_1, x_2, x_3 , dan x_4 . Posisi dan orientasi awal kereta Dubin diberikan atau diketahui sebagai syarat awal $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ dan $x_3(0) = x_{30}$. Sedangkan posisi dan orientasi akhir kereta Dubin diberikan atau diketahui sebagai syarat akhir sistem sebagai $x_1(T) = x_{1T}, x_2(T) = x_{2T}$ dan $x_3(T) = x_{3T}$.

Sebelum membicarakan strategi pengendalian dari kereta Dubin ini, untuk menjamin bahwa kereta Dubin dapat dikendalikan, harus dibicarakan dahulu perihal keterkontrolan dari model kereta Dubin yang disajikan dalam (1).

3. KETERKONTROLAN MODEL

Menurut [7] bila model (1) dilinearkan akan diperoleh model yang tidak terkontrol. Akibatnya, pemeriksaan keterkontrolan dilakukan tanpa melakukan linearisasi, yaitu dengan melibatkan operasi kurung Lie (*Lie Bracket*). Pembaca yang tertarik lebih lanjut untuk mempelajari kurung Lie yang meliputi definisi dan contoh-contohnya dapat merujuk ke pustaka [10]. Untuk pemeriksaan keterkontrolan model (1), pertama-tama diubah ke model non linear standar atau yang dikenal sebagai sistem Affine sebagai berikut:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2)$$

Dalam bahasan sistem non linear, persamaan (2) dikenal sebagai sistem non linear tanpa *drift*. Pembaca yang tertarik pada pembahasan perihal *drift* dapat merujuk [6, 10]. Model (2) dapat disingkat penyajiannya sebagai

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3)$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $f(x) = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriks keterkontrolan dari sistem non linear (2) dapat disajikan sebagai

$$C = [g(x), [f(x), g(x)]] \quad (4)$$

Dengan $[f(x), g(x)]$ adalah operasi kurung Lie antara $f(x)$ dan $g(x)$. Cara perhitungan operasi kurung Lie, pembaca dapat merujuk ke [6,10]. Secara lengkap, hasil perhitungan matriks keterkontrolan sistem [2] adalah sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} \sin x_3 & 0 & \cos x_3 \\ \cos x_3 & 0 & -\sin x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena rank matriks $C=3$, maka dengan merujuk teori keterkontrolan pada sistem non linear tanpa *drift* [10], yang disajikan dalam teorema berikut

Teorema 3.1 [6] *Jika sebuah sistem non linear tanpa drift yang berarti $f(x) = 0$ dan $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ dan jika matriks C mempunyai rank n , maka sistem non linear tersebut merupakan sistem yang terkontrol*

Berdasarkan Teorema 3.1 di atas, hasilnya dapat disimpulkan bahwa sistem non linear yang disajikan dalam (2) merupakan sistem yang terkontrol. Setelah keterkontrolan model dapat dijamin, langkah selanjutnya adalah melakukan perancangan kontrol kereta Dubin dengan menggunakan Prinsip maksimum Pontryagin.

4. PERANCANGAN KONTROL

Perancangan kontrol kereta Dubin dilakukan dengan kontrol optimum yang memanfaatkan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hal yang memegang peranan penting dalam perancangan kontrol dengan kontrol optimum adalah fungsional ongkos. Fungsional ongkos yang

dipergunakan dalam pengendalian kereta Dubin dalam paparan ini adalah

$$= - \int \sum () . \quad (5)$$

Pada fungsional ongkos yang disajikan dalam persamaan (5) digunakan tanda negatif, hal ini dikarenakan fungsional ongkos (5) ingin diminumkan, sedangkan prinsip optimisasi yang dipergunakan adalah Prinsip Maksimum Pontryagin. Ingat bahwa dengan memaksimumkan suatu fungsional yang negatif sama halnya dengan meminimumkan fungsional ongkos yang bersangkutan [8,9]. Pada fungsional ongkos yang disajikan dalam (5), adalah konstanta positif, yang nanti dalam simulasi diberikan suatu nilai.

Dengan memperhatikan model kereta Dubin yang disajikan dalam persamaan (1) dan fungsional ongkos yang tersaji dalam persamaan(5), dapat disusun fungsi Hamilton sebagai berikut

$$= \sin + \cos + \quad (6)$$

Para pembaca yang ingin secara detail mengetahui apa itu fungsi Hamilton dan bagaimana cara menyusunnya dapat merujuk pada [2,5]. Dalam perhitungan pada simulasi diberi nilai -1. Hal ini berdasarkan Teorema 4.1 yang disajikan sebagai berikut

Teorema 4.1 [2] Prinsip Maksimum Pontryagin dengan asumsi waktu akhir tetap, yaitu , menyatakan, jika * merupakan kontrol optimum, maka dipenuhi

1. $\dot{H} = -1$
2. * merupakan supremum $(, ,)$ untuk semua \in
3. persamaan ko-state memiliki suatu solusi * dan persamaan keadaan mempunyai solusi * yang bernilai saat = 0 dan saat =

4. nilai fungsi Hamilton sama dengan konstan di sepanjang lintasan optimum

Teorema 4.1 inilah yang menjamin bahwa dalam simulasi nilai dapat disubstitusikan dengan -1. Dari fungsi Hamilton (6) dapat diperoleh sistem Hamilton sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial} &= \dot{ } = \sin \\ \frac{\partial}{\partial} &= \dot{ } = \cos \\ \frac{\partial}{\partial} &= \dot{ } = \\ \dot{ } &= -\dot{ } = 0 \\ \frac{\partial}{\partial} &= -\dot{ } = 0 \\ \frac{\partial}{\partial} &= -\dot{ } = - \sin \end{aligned} \quad (7)$$

Pembaca yang ingin mengetahui secara rinci bagaimana cara mendapatkan sistem Hamilton yang disajikan dalam (7) di atas dapat merujuk pada pustaka [4]. Tiga persamaan pertama pada sistem (7) mempunyai syarat yang berlebih, artinya persamaan tersebut mempunyai syarat awal dan syarat akhir, sedangkan tiga persamaan terakhir tidak mempunyai syarat sama sekali padahal seluruh persamaan harus diselesaikan untuk mendapat penyelesaian.

Dengan Prinsip Maksimum Pontryagin yang disajikan dalam Teorema 4.1 yang menyatakan bahwa nilai fungsi Hamilton sama dengan konstan di sepanjang lintasan optimum, maka

$$\frac{\partial}{\partial} = 0 = \sin + \cos - \quad (8)$$

Dari (8) dapat diperoleh formula untuk dan formula untuk 2, jika disubstitusikan ke (7) akan diperoleh sistem persamaan diferensial non linear order satu sebagai berikut

$$\dot{ } = (\sin + \sin \cos)(-)$$

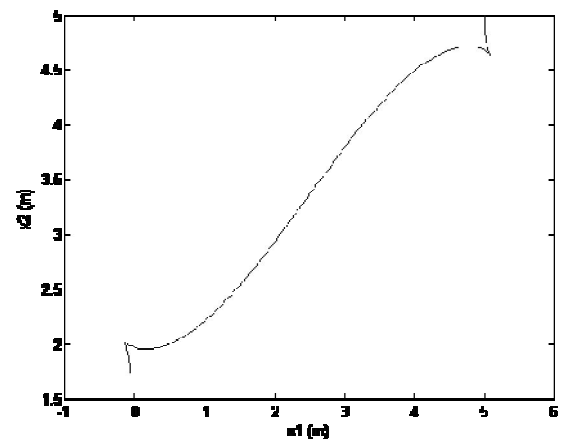
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\sin \theta \cos \psi + \cos \theta) \left(\frac{1}{r}\right) \\ \dot{y} &= (-) \\ -\dot{z} &= 0 \\ -\dot{\theta} &= 0 \\ -\dot{\psi} &= -\frac{1}{r} (\sin \theta \cos \psi + \cos \theta) \end{aligned} \quad (9)$$

Sistem persamaan (9) inilah yang harus diselesaikan, kendalanya adalah tiga persamaan pertama kelebihan syarat sedangkan tiga persamaan terakhir tidak mempunyai syarat sama sekali. Kesulitan ini diubah kedalam masalah nilai awal. Syarat awal untuk ketiga persamaan terakhir mula-mula dilakukan dengan tebakan awal. Selanjutnya dilakukan proses iterasi sampai diperoleh syarat awal dan syarat akhir variabel keadaan mendekati nilai yang sudah ditentukan. Proses yang lebih detail dapat merujuk pada [11]. Proses inilah yang membedakan paper ini dengan paper yang membahas kereta Dubin yang antara lain disajikan dalam [1,3,5,7]. Pada perancangan kontrol yang dilakukan dalam paper ini, masalah pengendalian diubah ke dalam masalah nilai awal, kemudian nilai awal dari variabel ko-state yang tidak ada atau tidak diketahui, dicari nilai pendekatan terbaiknya. Setelah nilai-nilai awal dari seluruh variabel diperoleh, maka penyelesaian masalah nilai awal dapat dilakukan, sekaligus menjawab masalah penyelesaian pengendalian kereta Dubin. Untuk meyakinkan pembaca, bahwa perancangan kontrol yang dideskripsikan dalam sesi ini dapat berhasil dilakukan, penulis akan menyajikan sebuah simulasi pengendalian kereta Dubin yang disajikan dalam sesi berikut.

5. SIMULASI

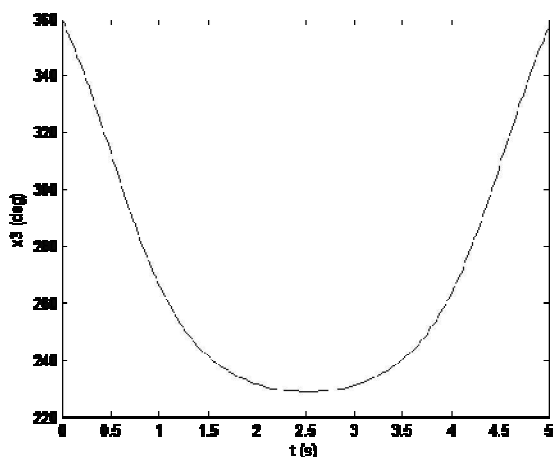
Untuk memberikan gambaran kepada para pembaca, berikut akan disajikan simulasi pengendalian kereta Dubin. Dalam simulasi ini, kereta Dubin disyaratkan harus memenuhi secara bersama-sama satu buah syarat awal dan satu buah syarat akhir. Meskipun pada perancangan kontrol, masalah diubah ke

dalam masalah nilai awal, tidaklah berarti bahwa syarat akhir kemudian diabaikan. Syarat akhir akan menjadi pengukur besarnya nilai kesalahan yang harus diminimumkan dalam penentuan nilai pendekatan terbaik untuk syarat awal dari variabel ko-state yang tidak diketahui nilainya atau tidak ada nilainya. Dalam simulasi kali ini digunakan syarat awal $(5,5,0)^t$ dan syarat akhir $(0,1.8,0)^t$. Syarat awal dan akhir mengacu pada (a,b,c) yang berarti posisi kereta Dubin pada (a,b) dengan membentuk sudut orientasi c derajat. Pemilihan syarat awal dan dan syarat akhir ini dapat diberikan dengan memperhatikan bahwa nilai tempat pertama dan kedua merepresentasikan posisi kereta Dubin pada bidang (absis dan ordinat dari suatu titik pada koordinat pada bidang datar) dan tempat ketiga adalah orientasi kereta Dubin. Dengan pertimbangan ini, pembaca yang tertarik untuk mencoba posisi dan orientasi yang lain tentu dapat mencobanya dan akan mendapatkan lintasan optimal yang berlainan pula. Lintasan yang diperoleh merupakan lintasan yang optimum karena dijamin oleh perancangan kontrol optimum yang pada paper ini menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dengan menerapkan syarat awal dan akhir ini pada sistem persamaan diferensial non linear (9) serta menerapkan metode yang disajikan dalam paper [11] diperoleh hasil simulasi lintasan optimum dari kereta Dubin yang disajikan dalam Gambar 2.



Gambar 2 Perubahan posisi kereta Dubin

Dalam Gambar 2 dapat dilihat adanya perubahan posisi dari kereta Dubin setiap saat dari posisi awal pada waktu awal sampai pada posisi akhir pada waktu akhir. Perubahan posisi inilah yang disebut sebagai trajektori dan karena kontrol kereta Dubin dirancang dengan kontrol optimum maka trajektori hasilnya pun adalah trajektori optimum. Gambar 2 memberikan hasil lintasan dari kereta Dubin mulai dari posisi pada waktu mula-mula yaitu (5,5) sampai dengan posisi akhir yang dipersyaratkan yaitu (0,1.8). Karena dalam model kereta Dubin yang menjadi perhatian dalam paper ini tidak hanya menyajikan posisi kereta, tetapi juga memperhatikan orientasi dari kereta Dubin, maka hal yang penting untuk diamati juga adalah perubahan orientasi kereta Dubin untuk setiap waktu dari waktu awal sampai waktu akhir. Dalam Gambar 2 perubahan orientasi kereta Dubin setiap saat dari waktu awal sampai akhir tidak dapat dilihat. Karena itu perubahan orientasi kereta Dubin setiap saat dari waktu awal sampai akhir haruslah disajikan dalam gambar tersendiri. Perubahan orientasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Perubahan orientasi kereta Dubin

6. KESIMPULAN

Tulisan ini telah berhasil dengan baik, mensimulasikan pengendalian sebuah kereta Dubin. Kereta Dubin yang bergerak

dari suatu posisi dan orientasi awal menuju ke suatu posisi dan orientasi akhir yang kedua-duanya diketahui dalam suatu waktu yang sudah tertentu pula. Penggunaan metode kontrol optimum dalam pengendalian kereta Dubin telah berhasil ditunjukkan dalam simulasi pada paper ini. Perbedaan cara penyelesaian masalah yang disajikan dalam paper ini dengan paper yang lain misalnya [1,5,7] adalah pada penyelesaian sistem hamilton yang dibawa pada masalah syarat awal dan pencarian pendekatan terbaik untuk syarat awal pada persamaan-persamaan yang sama sekali tidak mempunyai syarat pada sistem Hamilton. Masih terbuka mengembangkan lagi penelitian ini, misalnya adanya halangan, sehingga kereta harus bergerak tanpa menabrak penghalang tersebut.

7. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis secara khusus mengucapkan banyak terima kasih atas komentar, saran dan masukan dari *reviewer* yang telah menelaah paper ini sebelum dinyatakan layak untuk dipublikasikan.

8. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ahmadzadeh, A., et al. (2009), *Multi-vehicle path planning in dynamically changing environments*, Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation 2009, 2449-2454
- [2] Hocking, L.M. (1991), *Optimal Control*, Oxford University Press, Oxford
- [3] Kelly, A., Nagy, B. (2003), *Reactive nonholonomic trajectory generation via parametric optimal control*, The International Journal of Robotic Research 22: 583 - 601.
- [4] Lewis, F.L., Symos, V.L. (1995), *Optimal control*, John Wiley and sons, New York.
- [5] Moshtagh, N., et al. (2009), *Vision-Based, Distributed Control Laws for Motion Coordination of Nonholonomic Robots*, IEEE Transactions on Robotics, 25(4) : 851-860.

- [6] Nijmeijer, H., Schaft, A. (1990), *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, New York.
- [7] Oriolo, G., et al. (2002), *WMR Control Via Dynamic Feedback Linearization: Design, Implementation, and Experimental Validation*, IEEE Transaction on Control Systems Technology, 10(6) : 835-852.
- [8] Peressini, A.L., et al. (1998), *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer-Verlag.
- [9] Polak, E. (1997), *Optimization*, Springer-Verlag, New York
- [10] Slotine, J.E., Li, W. (1991), *Applied nonlinear control*, Prentice Hall
- [11] Tjahjana, H., et al. (2009), *On The Optimal Control Computation of Linear Systems*, Journal of the Indonesian Mathematical Society, 15(1) : 13-20.
-