HIMPUNAN BILANGAN BULAT NON NEGATIF PADA SEMIRING LOKAL DAN SEMIRING FAKTOR

Meryta Febrilian Fatimah[1], Nikken Prima Puspita[2], Farikhin[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. Let commutative Semiring *S*. Ideal on Semiring *S* defined in the same way with the Ideal on the ring. On Semiring there are special Ideals such as -ideal, -maximal Ideal and -ideal. Semiringwith a unique -maximal Ideal is called local Semiring. In This paper we will discussed that from non negative integer we can determined a local Semiring and quotient Semiring.

Keywords : Commutative Semiring, -ideal, -maximal Ideal, -ideal, local Semiring, quotient Semiring

1. PENDAHULUAN

Konsep Semiring diperkenalkan oleh H. S. Vandiver pada tahun 1935. [1] telah membahas tentang salah satu Ideal pada Semiring yaitu Ideal subtraktif. Penelitian terus berkembang hingga pada tahun 2008 [2, 3] penelitan yang menghasilkan konsep tentang Ideal pada Semiring komutatif, Semiring lokal dan Semiring faktor.

Dalam Struktur Aljabar yang dapat dipelajari pada [4, 5, 6] telah diketahui bahwa himpunan bilangan bulat ( ) terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian ( ) merupakan Ring. Sedangkan himpunan bilangan bulat non negatif ( ) terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian ( ) merupakan Semiring. Pada tulisan ini akan dihubungkan bagaimana konsep semiring yang telah dikemukakan oleh Reza Ebrahimi Atani dan Shahabaddin Ebrahimi Atani kedalam himpunan bilangan bulat non negatif ( ).

2. PEMBAHASAN

2.1 Ideal atas Semiring Komutatif

Untuk dapat memahami tentang konsep semiring lokal dan semiring fakor, terlebih dahulu dipelajari mengenai ideal yang ada pada semiring sebagai mana diberikan dalam bagian berkut.

Definisi 2.1 [2] *Diberikan Semiring* (, +,). *Himpunan tak kosong I dari Semiring R disebut Ideal jika* , *dan* *berlaku* + *dan* .

Berdasarkan Definisi 2.1 untuk setiap , himpunan (, +,) adalah Ideal pada (, +,) [2]. Himpunan dapat ditulis dengan notasi $\langle k \rangle$.

Definisi 2.2 [2] *Diberikan Semiring* (, +,). *Ideal subtraktif (k-ideal) I adalah Ideal di R dengan syarat untuk setiap* , *dengan* , + *, maka* .

Berdasarkan Definisi 2.4 untuk setiap , himpunan (, +,) merupakan *k*-ideal pada (, +,). Himpunan $\{0\}$ merupakan *k*-ideal pada (, +,).

Berikut diberikan definisi dari *k-closure.*

Definisi 2.3 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dan Ideal I atas R. Himpunan k-closure I (cl(I)) didefinisikan sebagai*

( ) =
{ | + = , , }

Berikut ini diberikan sifat terkait *k-closure I* merupakan Ideal di *R*.

Sifat 2.4 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dan I Ideal di R. Himpunan cl(I) merupakan Ideal di R.*

Bukti :

Diberikan himpunan

( ) =
{ | + = , , } .

Dibuktikan ( ) adalah Ideal di *R*.

a. Himpunan ( ) ≠ , sebab terdapat 0 sehingga 0 + 0 = 0 untuk suatu 0 , jadi 0 ( ). Terbukti bahwa himpunan ( ) ≠ .

b. Himpunan ( ) , sebab untuk setiap ( ), maka dari definisi ( ) yaitu untuk dengan + = untuk suatu , .

c. Diambil sebarang , ( ), sehingga + = , untuk suatu , dan + " = ", untuk suatu ", " diperoleh

+ + + " = + "

untuk suatu , ", , " . Oleh karena *I* Ideal, maka + " dan + " . Jadi + + = untuk suatu = + ", = + ". Hal ini berakibat + ( ). Untuk setiap diperoleh . + . = . dan karena , dan adalah Ideal, maka , . Berakibat bahwa . ( ).

Dari (a) – (c) terbukti bahwa ( ) Ideal di R.

Beberapa sifat-sifat yang terkait dengan himpunan *k-closure* dijelaskan sebagai berikut :

Sifat 2.5 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dan I Ideal di . Himpunan* ( ) *memenuhi*

i. ( ),

ii. ( ) = ( )

Bukti :

i. Dibuktikan ( )
Diambil sebarang . Berdasarkan Definisi 2.3 jelas bahwa ( ).

ii. Dibuktikan ( ) = ( ), yaitu ( ) ( ) dan ( ) ( ).

a. Jelas bahwa ( ) ( ) , sebab untuk setiap ( )dan dari bagian (i) diketahui ( ), terbukti bahwa (( )).

b. Dibuktikan ( ) ( )
Diketahui (( )) yaitu + = , untuk suatu , ( ). Berdasarkan Definisi 2.3 diperoleh

+ =

+ + + = + +

(sifat komutatif penjumlahan) dari Definisi 2.3 terbukti bahwa ( ).

Dari (a) dan (b) terbukti bahwa ( ) = ( ).

Pada Sifat 2.5 dijelaskan bahwa ( ). Berikut diberikan syarat perlu dan cukup agar terpenuhi sifat = ( ).

Sifat 2.6 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dan I Ideal di R. Ideal I adalah k-ideal jika dan hanya jika* = ( ).

Bukti dapat dilihat pada [2] .

Sama halnya dengan Ring, pada Semiring juga dikenal Ideal maksimal dan Ideal Prima [2]. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.7 [2] *Diberikan Semiring* (, +,). *Ideal I dari R dikatakan maksimal jika terdapat J Ideal di R dengan berakibat* = *atau* = .

Berdasarkan Definisi 2.7 himpunan 2 merupakan Ideal maksimal pada Semiring(, +,). Diberikan definisi - ideal maksimal sebagai berikut.

Definisi 2.8 [2] *Diberikan Semiring* (, +,). *Ideal I dari R dikatakan k- ideal maksimal jika terdapat J k-ideal di R dengan berakibat* = *atau* = .

Berdasarkan Definisi 2.8 himpunan 2 yang merupakan -ideal pada Semiring (, +,) merupakan -ideal maksimal. Selanjutnya di dalam Semiring terdapat konsep Ideal partisi dinotasikan dengan *Q*-Ideal.

Definisi 2.9 [7] *Diberikan Semiring*(, +,) *dan I Ideal pada R. Ideal I disebut Ideal partisi (Q-ideal) asalkan*

i. himpunan sedemikian sehingga = { + | },

ii. untuk setiap , , berlaku (+) ∩ (+) = *untuk* ≠ .

Berdasarkan Definisi 2.9 diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.10

Diberikan Semiring (, +,)dan , ≠ 0. Himpunan

= { | }

merupakan *Q*-ideal pada (, +,). Diketahui bahwa himpunan

= { | }

merupakan Ideal di (, +,). Ideal adalah *Q*-ideal pada(, +,), sebab terdapat terdapat dimana = { |0 ≤ ≤ − 1} sedemikian sehingga

(i.) untuk setiap dapat dibentuk himpunan, + = { + | }. Ditunjukkan bahwa = { + | }.

a. Himpunan + ≠ , paling tidak terdapat 0 = sehingga + = {0 + |0 } = .

b. Himpunan + , sebab untuk setiap dan dengan menggunakan sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan di (, +,) diperoleh + .

c. Ditunjukkan bahwa himpunan { + | } . Diambil sebarang + { + | }, karena , dan berlaku operasi tertutup terhadap penjumlahan di (, +). Sehingga diperoleh + . Terbukti himpunan { + | } .

d. Ditunjukkan bahwa himpunan { + | }. Diambil sebarang , ditunjukkan bahwa { + | }.

i. Jika0 ≤ ≤ − 1, maka untuk setiap { + | } { + | } dengan = { |0 ≤ ≤ − 1} diperoleh = + = + untuk suatu = + 0 untuk = 0 =

Oleh karena { + | }, untuk = 0 diperoleh = { + | }.

ii. Jika = , maka terdapat = 0 sedemikian sehingga = 0 + = untuk suatu = 1 untuk = 1 , =

Oleh karena { + | }, untuk = 0 diperoleh = { + | }.

iii. Jika > , maka terdapat (−) , dimana (−) ≤ − 1 dan (−) ≥ 0 sedemikian sehingga = (−) + = (−) + untuk setiap

Oleh karena(−) , berakibat {(−) + } { + | } sehingga = (−) + { + | }.

Dari (i) – (iii) terbukti bahwa { + | }.

Dari (a) – (d) terbukti bahwa = { + ( ) | }.

(ii.) Untuk setiap , , (+) ∩ (+) = untuk ≠ . Diambil sebarang , , dengan (+) ∩ (+) = , dibuktikan ≠ . Andaikan = , maka dari sifat tertutu penjumlahan di , + = + sehingga diperoleh (+) ∩ (+) = (+) ∩ (+) = (+) Kontradiksi dengan (+) ∩ (+) = . Pengandaian salah, maka haruslah ≠ .

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa himpunan = { | } merupakan *Q*-ideal di (, +,).

2.2 Semiring Lokal

Diberikan Semiring (, +,) dengan elemen satuan *1*. Setiap dengan ≠ 0 disebut semi-unit di *R* jika terdapat , sedemikian sehingga 1 + =

. Ideal merupakan ideal pada Semiring , 1 jika dan hanya jika = .

Lemma 2.11 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dengan elemen satuan dan k-ideal I di R, pernyataan berikut dipenuhi.*

(i.) *Jika a adalah semi-unit di R dengan , maka = .*

(ii.) *Untuk setiap , maka ( ) adalah k-ideal dari R.*

Bukti dapat dilihat pada [2] .

Berikut ini diberikan lemma tentang *k*-ideal maksimal pada Semiring .

Lemma 2.12 [2] *Diberikan Semiring* (, +,) *dengan elemen satuan. Paling tidak terdapat satu k-ideal maksimal di R.*

Bukti :

Dibentuk himpunan = { | − }. Himpunan tak kosong, sebab himpunan {0} adalah *k*-ideal di *R*, jadi {0} . Himpuanan merupakan himpunan terurut parsial terhadap relasi yaitu untuk setiap , [4]. Akibatnya, pasangan (,) merupakan himpunan terurut parsial. Dengan menggunakan Lemma Zorn jika dibentuk rantai naik di yaitu yang merupakan Ideal-Ideal di *R*, maka terdapat dengan tunggal sehingga . Dengan kata lain adalah *k*-ideal maksimal di *R*.

Selanjutnya, diberikan definisi Semiring lokal sebagai berikut.

Definisi 2.13 [2] *Diberikan Semiring*(, +,). *Semiring R disebut Semiring lokal asalkan R memiliki k-ideal maksimal yang tunggal.*

Berikut ini diberikan Teorema yang berkaitan dengan *k*-ideal maksimal pada sebuah Semiring yang dibangun oleh elemen-elemen yang berhingga.

Teorema 2.14 [1] *Diberikan Semiring* (, +,) *dengan* = , , … , *merupakan Semiring yang dibangun secara berhingga. Jika A merupakan k-ideal di R, maka A termuat dalam suatu k-ideal maksimal di R.*

Bukti :

Diketahui merupakan -ideal di . Dibentuk himpunan

Δ = { | − , ≠ }

Himpunan Δ≠ , sebab paling tidak terdapat Δ yang merupakan -ideal di . Pasangan (Δ,) merupakan poset dan dari definisi himpunan , untuk setiap $T_i \in \Delta$ diperoleh $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \ldots$ sehingga himpunan Δ akan mmuat batas atas paling tidak adalah *R*. Kemudian dimisalkan merupakan gabungan semua -Ideal di Δ yang memuat , dinotasikan dengan = Δ dan untuk setiap . Ditunjukkan merupakan -ideal di . Himpunan merupakan -ideal di , sebab memenuhi aturan berikut:

1. Himpunan Ideal di , sebab jika diambil sebarang , = artinya bahwa paling tidak terdapat Ideal , Δ sedemikian sehingga dan . Untuk setiap $J, K \in \Delta$, maka terdapat dua kasus yang mungkin yaitu atau .
   a. Kasus 1, untuk . Untuk setiap , dan Ideal di , maka + dan untuk setiap berlaku , .
   b. Kasus 2, untuk . Untuk setiap , dan Ideal di , maka + dan untuk setiap berlaku , .

   Dari (a) dan (b) karena , , maka terbukti bahwa Ideal di .
2. Himpunan -ideal di , sebab jika diambil sebarang , + = artinya bahwa paling tidak terdapat -ideal , Δ sedemikian sehingga dan + . Untuk setiap , Δ , maka atau .
   a. Kasus 1, untuk . Untuk setiap , + dan -ideal di , maka .
   b. Kasus 2, untuk . Untuk setiap , + dan -ideal di , maka .

Dari (a) dan (b) karena , , maka terbukti bahwa -ideal di .
Dari (1) dan (2) diketahui bahwa merupakan -ideal di . Ditunjukkan bahwa ≠ . Diketahui Δ dan Δ≠ . Oleh karena Δ≠ , maka 1∉ Δ . Hal ini berakibat 1 , sehingga ≠ . Jadi terbukti bahwa merupakan batas atas di Δ dan -ideal yang memuat di . Dengan kata lain merupakan -ideal maksimal di dan .
Selanjutnya, diberikan akibat dari Teorema 2.14 sebagai berikut.

Akibat 2.15 [1] *Diberikan Semiring (, +,) dengan elemen satuan 1. Setiap k-ideal di R termuat dalam suatu k-ideal maksimal di R.*
Bukti dapat dilihat di [1].

Lemma 2.16 [2] *Diberikan Semiring (, +,) dengan elemen satuan 1 dan . Elemen a merupakan semi-unit di R jika dan hanya jika a tidak termuat pada setiap k-ideal maksimal di R.*

Bukti :
( )Diketahui merupakan semi-unit di *R*. Dibuktikan bahwa untuk sebarang adalah -ideal maksimal di *R*, maka . Diambil sebarang adalah -ideal maksimal di *R* dan , ≠ . Andaikan , karena merupakan -ideal di . Dari Lemma 2.11 (i) diperoleh = , kontradiksi dengan ≠ . Pengandaian salah, haruslah .
( )Diketahui dan merupakan -ideal maksimal di . Dibuktikan bahwa merupakan semi-unit di . Diambil sebarang dan , andaikan bukan semi-unit di maka tidak ada , sedemikian sehingga 1 + = . Berdasarkan Definisi 2.3, berakibat 1 ( ), sebab tidak ada , sedemikian sehingga 1 + = . Dari Lemma 2.11 (ii) diketahui bahwa ( ) merupakan -ideal di . Oleh karena untuk suatu -ideal maksimal di dari Teorema 2.14 haruslah ( ) atau ( ) sehingga . Kontradiksi, dari yang diketahui pengandaian salah haruslah merupakan semi-unit di .
Berikut diberikan Teorema pada Semiring lokal.

Teorema 2.17 [2] *Diberikan Semiring (, +,) dengan elemen satuan 1. Semiring R dikatakan Semiring lokal jika dan hanya jika himpunan dari semua elemen non-semi unit di R adalah k-ideal.*

Bukti :
( )Dari yang diketahui *R* dikatakan Semiring lokal asalkan terdapat dengan tunggal *P* sebagai *k*-ideal maksimal [2]. Terbukti bahwa *P* yang merupakan *k*-ideal maksimal mempunyai elemen-elemen dimana untuk setiap , bukan merupakan semi-unit.
( )Diberikan himpunan = { | − } yang merupakan *k*-ideal di *R*, maka *I* adalah *k*-ideal maksimal [2]. Oleh karena1 dan 1 adalah semi-unit di *R*, maka1 atau ≠ . Semiring *R* paling tidak memuat satu *k*-ideal maksimal [2], misalkan *J* adalah *k*-ideal maksimal di *R*, sehingga *J* memuat elemen-elemen yang bukan unit. Hal ini berakibat dan ≠ . Oleh karena *I* adalah *k*-ideal maksimal dan ≠ , jadi haruslah = .

2.3 Semiring Faktor

Untuk setiap Ideal *I* yang merupakan *Q*-ideal di *R* dapat dibentuk himpunan

$$= \{ \quad + \mid \quad \}$$

Pada himpunan didefinisikan operasi penjumlahan( ) dan operasi perkalian ( ) dengan definisi (+) (+) = + dimana adalah elemen tunggal sedemikian sehingga + + + dan (+) (+) = + dimana adalah elemen tunggal sedemikian sehingga + + + . Selanjutnya pada teorema berikut ditunjukkan bahwa terhadap operasi dan membentuk struktur Semiring.

Teorema 2.18 [2] *Diberikan Semiring (, +,) dan I adalah Q-ideal di R. Himpunan merupakan Semiring* *terhadap operasi penjumlahan ( ) dan perkalian( ).*

Bukti dapat dilihat pada [2].

2.4 Himpunan Bilangan Bulat Non Negatif pada Semiring Lokal dan Semiring Faktor

Penelitian yang dihasilkan oleh [2] telah dikemukakan pada Bagian 2.1, 2.2 dan 2.3. Pada bagian ini akan dijelaskan bagaimana dari himpunan bilangan bulat non negatif diperoleh sebuah semiring faktor dan semiring lokal sebagaimana dijelaskan dalam sifat berikut.

Sifat 2.19 [2] *Semiring* (, +,) *merupakan Semiring lokal dengan k-ideal maksimal* {2,3}

Bukti :

Diketahui bahwa {2,3} merupakan yang dibangun oleh 2 dan 3 atau {2,3} = {2 + 3 | , } merupakan *k*-ideal maksimal tunggal di (, +,).

1. Himpunan {2,3} ≠ . Oleh karena 0 maka paling tidak ada
   $0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0$ {2,3}
   berakibat {2,3} ≠ .
2. Himpunan {2,3} . Diambil sebarang = 2 + 3 {2,3} , karena , dan berlaku sifat tertutup terhadap operasi perkalian serta penjumlahan di (, +,) berakibat 2 , 3 sehingga diperoleh 2 + 3 = . Jadi, terbukti bahwa himpunan {2,3} .
3. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan Ideal di . Diambil sebarang , (2,3) dengan = 2 + 3 dan = 2 + 3 dimana , , , , diperoleh
   + = (2 + 3) + (2 + 3)
   = 2 + 2 + 3 + 3
   = 2(+) + 3(+)
   (sifat komutatif di (, +))
   Oleh karena sifat tertutup yang berlaku di (, +) dimana untuk setiap , , , berlaku + = dan + = , maka 2(+) + 3(+) = 2 + 3
   Untuk setiap diperoleh
   = (2 + 3)
   = 2 + 3 (sifat distributif kanan di (, +,))
   = 2( ) + 3( )
   karena untuk setiap , , berlaku , berakibat
   2( ) + 3( ) (2,3)
   Jadi, terbukti bahwa himpunan {2,3} merupakan Ideal pada(, +,).
4. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan *k*-ideal di . Diambil sebarang {2,3} dengan = 2 + 3 dimana , dan + {2,3} . Diketahui + {2,3} atau + = untuk suatu = 2 + 3 {2,3} dengan , . Dari sifat penjumlahan di diperoleh
   + =
   2 + 3 + = 2 + 3
   haruslah merupakan bilangan bulat yang dibangun oleh dua dan tiga atau = 2 + 3 dengan , . Dengan kata lain terbukti bahwa {2,3} atau himpunan {2,3} merupakan *k*-ideal di .
5. Dibuktikan bahwa himpunan {2,3} merupakan Semiring lokal yaitu himpunan dari semua elemen non-semi unit di adalah*k*-ideal. Dari yang diketahui himpunan {2,3} merupakan *k*-ideal di , dibuktikan bahwa jika semi unit di maka {2,3} . Diketahui bahwa elemen semi unit di adalah elemen satuan 1, 1 {2,3} , sebab untuk setiap , tidak ada yang memenuhi 2 + 3 = 1. Jadi, 1 {2,3} dan {2,3} merupakan *k*-ideal di . Terbukti bahwa himpunan {2,3} merupakan Semiring lokal.

Dari (1) – (5) terbukti bahwa himpunan {2,3} = {2 + 3 | , } merupakan -ideal maksimal di .

Sifat 2.20 Diberikan Semiring (, +,) dan Ideal . Dari himpunan dan dapat dibentuk Semiring faktor

= { + | }

dengan

$= \{ \quad |0 \leq \quad \leq \quad - 1\}$.

Bukti :

Berdasarkan Contoh 2.10 telah ditunjukkan bahwa merupakan $-$ dengan $= \{ \quad |0 \leq \quad \leq \quad - 1\}$. Hal ini berakibat bahwa dapat dibentuk Semiring faktor $= \{ \quad + \quad | \quad \}$ (Teorema 2.18).

3. PENUTUP

Pembahasan yang telah diuraikan menjelaskan bahwa himpunan bilanganbulat non negatif ( ) merupakan Semiring komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dan dinotasikan dengan $(\quad , +,)$. Semiring $(\quad , +,)$ merupakan Semiring lokal dimana hanya mempunyai satu -ideal maksimal tunggal yaitu Ideal $\{2,3\}$. Himpunan merupakan -ideal di Semiring $(\quad , +,)$ dengan $= \{ \quad |0 \leq \quad \leq \quad - 1\}$, sehingga dapat dibentuk Semiring faktor .

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Sen, M. K. and M. R. Adhikari, (1993), On Maximal *k*-ideals of Semirings. *Proceedings of The American Mathematical Society*. 118(3) :699-703.

[2] Atani, Reza Ebrahimi and Shahabaddin Ebrahimi Atani, (2008), Ideal Theory in Commutative Semirings. *Buletinul Academiei De Stiinte. Republicii Moldova*. 57 (2) : 14-23.

[3] Atani, Reza Ebrahimi, (2013), Generalizations of Prime Ideals of Semirings. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 3(1) : 76-83.

[4] Fraleigh, John B., (2003), *A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition*. United States of America : Addison Wesley Publishing Company, Inc.

[5] Gilbert, Linda and Jimmie Gilbert, (2009), *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. United States of America :Cengage Learning.

[6] Howie, John M., (1995), *Fundamentals of Semigroup Theory*.Skotlandia : Clarendon Press.

[7] Allen, Paul J., (1969), A Fundamental Theorem of Homomorphisms for Semirings. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 21 (2) : 412-416.