Membangun Kode Golay (24, 12, 8) dengan Matriks Generator dan Menggunakan Aturan Kontruksi

Ikhsan Rizki K[1] dan Bambang Irawanto[2]
[1, 2]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jln. Prof. H. Soedarto, S.H, Tembalang, Semarang

Abstract : The binary (24, 12, 8) extended Golay code can be constructed through the direct sum operation with involve two product codes. This method form the generator matrix framework of the (24, 12, 8) Golay code that is based on the so-called Turyn or |a + x|b + x|a + b + x| construction, where $\mathbf{a},\mathbf{b} \in C_1$ and $\mathbf{x} \in C_1^{'}$. C_1 and $C_1^{'}$ is the (8, 4, 4) linear block codes. $C_1^{'}$ can be gotten by applying construction rules to get the generator matrix of $C_1^{'}$. With C_1 and $C_1^{'}$ and by applying the generator matrix framework of the (24. 12, 8) Golay code get the binary (24, 12, 8) extended Golay code.

Keyword :Block codes, direct sum, Golay Code, product codes.

1. PENDAHULUAN

Kode Golay biner (24, 12, 8) dinotasikan C_{24}, adalah kode yang dibentuk dari kode Golay biner (23, 12, 7) dengan menambah sebuah bit pemeriksa [2]. Kode Golay (24, 12, 8) dapat mengoreksi 3 *error* dan mendeteksi 4 *error*.

Menurut [2], C_{24} dapat dibangun dengan menggunakan komponen kode dengan panjang dan dimensi yang lebih kecil. Berdasarkan [7], C_{24} dibangun sebagai *direct sum* dari dua *product* kode dengan melibatkan 4 komponen kode yaitu : sebuah (3, 2, 2) *Single Parity Check Code*, sebuah kode pengulangan (3, 1, 3), dan dua buah kode blok linier (8, 4, 4). Telah diketahui [2], kontruksi dalam metode ini menerapkan kerangka |a + x|b + x|a + b + x| dengan menggunakan dua kode blok linier (8, 4, 4). Dalam tulisan ini, satu dari dua kode linier (8, 4, 4) yang digunakan didapat dengan memberikan kerangka matriks generator yang elemen-elemennya memenuhi aturan kontruksi dengan menggunakan kode (8, 4, 4) yang asli sebagai acuannya.

Pemberian aturan kontruksi disini menghasilkan 2 kode linier (8, 4, 4) yang baru dan sama seperti [2], 2 kode tersebut ekuivalen (mempunyai distribusi bobot yang sama) tetapi mewakili subruang kode yang berbeda dengan kode (8, 4, 4) yang asli. Dengan memberi kode (8, 4, 4), bersamaan dengan satu dari 2 kode (8, 4, 4) yang dihasilkan, dalam semua kasus menghantar untuk membangun kode Golay (24, 12, 8). Perlu dicatat kode (8, 4, 4) yang asli yang digunakan sebagai acuan mencari kode (8, 4, 4) yang baru adalah kode yang sistematis, sedangkan kode (8, 4, 4) baru yang dihasilkan bukan kode yang sistematis.

2. MATRIKS GENERATOR

Seperti hasil yang sudah dikemukakan dalam jurnal sebelumnya [2], kerangka matriks generator $\hat{G}$ dari C_{24} adalah hasil dari *direct sum* 2 *product* kode C(24, 8, 8) yang dibentuk oleh kode blok linier C_1(8, 4, 4) dan C_2(3, 2, 2) *Single Parity Check Code* dan *product* kode $C^{'}$(24, 4, 12) yang dibentuk oleh $C_1^{'}$(8, 4, 4) yang baru dan kode pengulangan $C_2^{'}$(3, 1, 3). Matriks generator G dari C diberikan oleh :

$$G = G_2 \otimes G_1 = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ 0 & G_1 & G_1 \end{pmatrix},$$ dimana G_1 adalah matriks generator dari kode C_1 berukuran 4×8, dan '0' mewakili matriks

nol 4×8 [2], dan matriks generator G' dari C' diberikan oleh :

$G' = G_2' \otimes G_1' = (G_1'\,G_1'\,G_1')$ dimana G_1' adalah matriks generator dari C_1' berukuran 4×8 [2] dan diperoleh dengan menerapkan aturan kontruksi.

Menurut [2], matriks generator $\hat{G}$ dari $\hat{C}$ kemudian diberikan oleh :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ 0 & G_1 & G_1 \\ G_1' & G_1' & G_1' \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Sehingga kode $\hat{C}$ dapat dinyatakan sebagai :

$\hat{C} = C \oplus C' = \{(c_1 + c_2): c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$

dengan dimensi :

$dim(\hat{C}) = dim(C) + dim(C')$
$= 8 + 4 = 12.$

Berdasarkan pers (1) diatas bahwa $\hat{C}$ adalah sebuah $\hat{C}$ (n, k) yaitu kode Linier (24, 12). Setiap kodekata dalam $\hat{C}$ mempunyai bentuk :

$\hat{c} = |a + x|b + x|a + b + x|$dimana $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C_1$ dan $\mathbf{x} \in C_1'$ yang merupakan kasus dari *Turyn construction* [7]. Jarak minimum kode $\hat{C}$ bergantung pada struktur kode C_1 dan kode C_1' yang diwakili oleh matriks generator G_1 dan G_1'.

Sama seperti [2], C_1 adalah kode linier (8, 4, 4) yang sistematis, sehingga matriks generator G_1 dari kode C_1 dapat dinyatakan :

$$G_1 = (I_4 \quad P) \qquad (2)$$

dimana I_4 adalah matrik identitas 4×4 dan P adalah sub matrik parity 4×4 dari G_1. Elemen dari P dapat dinyatakan sebagai vektor baris, yaitu :

$$P = (P_1, P_2, P_3, P_4)^T$$

dimana P_i, i = 1, 2, 3, 4 adalah pilihan tunggal (*uniquely*) dari himpunan S :

S={(1 1 1 0), (1 1 0 1), (1 0 1 1), (0 1 1 1)} dalam suatu urutan [7].

Dengan demikian akan membentuk kode blok linier $C_1(8, 4, 4)$ dengan distribusi bobot kodenya : {N(0) = 1, N(4) = 14, dan N(8) = 1}, dimana N(x) menyatakan banyaknya kodekata dengan bobot x [7].

3. ATURAN KONTRUKSI

Selain melalui kriteria permutasi [2], G_1' juga dapat diperoleh dengan Aturan Kontruksi. G_1' yang dihasilkan dalam aturan kontruksi bukan merupakan kode yang sistematis sehingga bentuk matriks generatornya tidak ditemukan matriks identitas. Dengan demikian kode ini akan mempunyai 2 kodekata 8-tuple dengan bobot 4 dengan bentuk (1111000) dan (00001111). Pejumlahan kodekata-kodekata yang dihasilkan oleh G_1' harus menghasilkan kodekata dalam G_1'. Sedangkan penjumlahan dua kodekata diatas dengan sebarang kodekata dengan bobot 4 dalam G_1' dapat menghasilkan kodekata 8-tuple dengan bobot 2 atau 6.

Contoh 3.1

Diambil **a** = (1111 0000) dan **b** = (0000 1111), **a**, **b**$\in G_1'$ dan sebarang **x** = (11101000)$\in G_1'$.

a + **x** = (1111000) + (11101000)= (00011000) dan

b + **x** = (0000 1111) + (11101000) = (01111110).

Dua kodekata tersebut bukan merupakan kodekata dalam G_1', karena G_1' tidak mempunyai kodekata dengan bobot 2 atau 6. Distribusi bobot dari G_1' adalah {N(0) = 1, N(4) = 14, N(8) = 1} [7]. Dengan demikian kodekata dengan bobot 4 dalam G_1' kecuali 2 diatas harus merupakan kodekata 2-*and*-2.

Definisi 3.2 [7] *Kodekata 2-and-2 adalah kodekata 8-tuple dengan bobot 4 dan* *mempunyai tepat 2 elemen bukan nol dalam setiap setengah dari 8-tuplenya.*

Contoh 3.2
{(1100 0101), (0011 1100), (1010 1010), (0101 1100)} adalah himpunan kodekata 2-*and*-2, sedangkan {(1000 01101), (0111 1000), (1111 0000), (0000 1111)} bukan himpunan kodekata 2-*and*-2.

Dengan kondisi tersebut dapat disusun 2 kerangka matriks generator $G_1^{'}$ yang baru, kita sebut saja $G_{(7)}^{'}$ dan $G_{(8)}^{'}$. Struktur dari matriks generator $G_{(7)}^{'}$ dan $G_{(8)}^{'}$ dirancang khusus agar dapat digunakan untuk membangun C_{24}. Jadi diperlukan suatu aturan tertentu untuk memenuhi semua kondisi diatas. Berdasarkan pada kondisi demikian dua matriks generator dari kode diatas dirancang dalam bentuk :

$$G_{(7)}^{'} = \begin{pmatrix} g_{(7),1}^{'} \\ g_{(7),2}^{'} \\ g_h \\ g_{w=8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{(7),1}^{'(L)} & g_{(7),1}^{'(R)} \\ g_{(7),2}^{'(L)} & g_{(7),2}^{'(R)} \\ g_h & g_h \\ g_{w=8} & g_{w=8} \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$G_{(8)}^{'} = \begin{pmatrix} g_{(8),1}^{'} \\ g_{(8),2}^{'} \\ g_h \\ g_{w=8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{(8),1}^{'(L)} & g_{(8),1}^{'(R)} \\ g_{(8),2}^{'(L)} & g_{(8),2}^{'(R)} \\ g_h & g_h \\ g_{w=8} & g_{w=8} \end{pmatrix} \quad (3)$$

dimana

g_h : kodekata 8-tuple dengan bobot 4 dan mempunyai 4 elemen bukan nol pada setengah dari 8-tuple tersebut, yaitu (1111000) atau (00001111)

$g_{w=8}$: kodekata 8-tuple dengan bobot 8

$g_{(l),m}^{'}$: kodekata 2-*and*-2 (l = 7, 8 dan m = 1, 2)

$g_{(l),m}^{'(L)}$: setengah bagian kiri dari $g_{(l),m}^{'}$

$g_{(l),m}^{'(R)}$: setengah bagian kanan dari $g_{(l),m}^{'}$.

Penjumlahan antara 2 kodekata 2-*and*-2 atau $g_{(l),1}^{'} + g_{(l),2}^{'}$ diatas harus menghasilkan kodekata 2-*and*-2. Jadi kontruksi $g_{(7),m}^{'}$ dan $g_{(8),m}^{'}$ harus mengikuti aturan dibawah ini :

1. Diberikan
   $g_{(7),1}^{'(L)} = g_{(8),1}^{'(L)}$ = **x** dan
   $g_{(7),2}^{'(L)} = g_{(8),2}^{'(L)}$ = **y**,
   dimana **x** dan **y** adalah suatu 4-tuple dengan bobot 2 dengan **x** ≠ **y** dan $\bar{x} \neq y$ dimana $\bar{u}$ adalah komplemen dari u
2. Diberikan $g_{(l),m}^{'(R)}$ untuk l = 7, 8 dan m = 1, 2 dan harus memenuhi :
   $g_{(7),m}^{'(R)} \neq g_{(8),m}^{'(R)}$ dan $\overline{g_{(7),m}^{'(R)}} \neq g_{(8),m}^{'(R)}$ untuk m = 1, 2
   $g_{(l),1}^{'(R)} \neq g_{(l),2}^{'(R)}$ dan $\overline{g_{(l),1}^{'(R)}} \neq g_{(l),2}^{'(R)}$ untuk l = 7, 8
3. Diasumsikan bahwa elemen bukan nol dari x dan y adalah posisi i' dan j' nya, dimana $i, j, i', j' \in$ {1,2,3,4}. Kondisi-kondisi berikut ini harus juga dipenuhi
   $g_{(l),1}^{'(R)} \neq (P_i + P_j)$ dan $\overline{g_{(l),1}^{'(R)}} \neq (P_i + P_j)$ untuk l = 7, 8
   $g_{(l),2}^{'(R)} \neq (P_{i'} + P_{j'})$ dan $\overline{g_{(l),2}^{'(R)}} \neq (P_{i'} + P_{j'})$ untuk l = 7, 8
   disini P_u ($1 \leq u \leq 4$) adalah baris dari P dalam G_1 yang diberikan dalam persamaan (2).

Lemma 3.3 *Dua kode yang dihasilkan oleh* $G_{(7)}^{'}$ *dan* $G_{(8)}^{'}$ *yang dibangun berdasarkan (3) dengan menggunakan aturan kontruksi adalah kode linier (8, 4, 4).*

Bukti :
Pembuktiaan disini dengan membuktikan 2 kode tersebut menghasilkan 14 kodekata dengan bobot 4, dengan distribusi bobot : {N(0) = 1, N(4) = 14, N(8) = 1}. Aturan kontruksi menjamin 4 baris dari $G_{(7)}^{'}$ atau $G_{(8)}^{'}$ bebas linier. Karena $g_{(l),1}^{'}$ dan $g_{(l),2}^{'}$ adalah kodekata 2-

and-2 dan menurut Aturan 1 dan 2 maka $g'_{(l),1} + g'_{(l),2}$ dengan (l = 7, 8) semuanya menghasilkan 8-tuple dengan bobot 4 atau kodekata 2-*and*-2. Dengan menggunakan 3 aturan, semua kombinasi linier dari 2, 3, dan 4 baris dari $G'_{(7)}$ atau $G'_{(8)}$ akan menghasilkan kodekata dengan bobot 4 dengan jumlah

$$\sum_{j=2}^{4}\binom{4}{j} = \binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$$
$$= 6 + 4 + 1$$
$$=11$$

Jumlah baris dari $G'_{(7)}$ dan $G'_{(8)}$ dengan bobot 4 sebanyak 3 (N(4) = 3) sehingga jumlah keseluruhannya sebanyak 3 + 11 = 14. Dari 14 kodekata dengan bobot 4, terdapat 2 kodekata dengan bentuk (11110000) dan (00001111) dikarenakan struktur khusus dari $G'_{(7)}$ dan $G'_{(8)}$ yang terdiri dari $g_{w=8}$ dan g_h, sebagai sisanya adalah 12 kata kode 2-*and*-2. Jadi kode yang dihasilkan oleh kerangka matriks generator $G'_{(7)}$ dan $G'_{(8)}$ adalah kode linier (8, 4, 4). □

Lemma 3.4 *Semua kodekata dengan bobot 4 dari C_1 yang dihasilkan oleh G_1 dengan C'_1 yang dihasilkan oleh G'_1 ($G'_{(7)}$ dan $G'_{(8)}$) semuanya berbeda.*

Bukti :

C_1 adalah kode (8, 4, 4) yang sistematis sehingga G_1 terdiri sebuah matrik identitas 4 × 4, dengan demikian tidak memiliki kata kode (11110000) dan (00001111). Kombinasi linier yang melibatkan 2 vektor baris dari G_1 akan menghasilkan kodekata dengan bobot 4 dengan bentuk 2-*and*-2. Banyaknya kodekata ini adalah $\binom{4}{2}$ = 6.

Berdasarkan pers (2), 6 kodekata 2-*and*-2 dari G_1 dapat diperlihatkan sebagai :

cw_1 = (1100 P_{12}) cw_4 = (0011 P_{34})
cw_2 = (1010 P_{13}) cw_5 = (0101 P_{24})
cw_3 = (1001 P_{14}) cw_6 = (0110 P_{23})

dengan $P_{i,j} = P_i + P_j$ untuk $1 \le i, j \le 4$ dan $P_i, P_j \in P$ diberikan oleh pers (2). Karena C_1 mempunyai satu kodekata $g_{w=8}$, dapat menunjukkan bahwa :

$P_{3,4} = \overline{P_{1,2}}$, $P_{2,4} = \overline{P_{1,3}}$, $P_{2,3} = \overline{P_{1,4}}$. Artinya bahwa 6 kodekata diatas membentuk 3 pasang kodekata yang saling melengkapi, yaitu: $cw4 = \overline{cw1},\ cw5 = \overline{cw2},\ cw6 = \overline{cw3}$.

Sehingga tinggal membuktikan 3 pasang kodekata diatas berbeda dengan 12 kodekata 2-*and*-2 dari $G'_{(7)}$ atau $G'_{(8)}$. 12 kodekata 2-and-2 dari $G'_{(7)}$ atau $G'_{(8)}$ dihasilkan dari kombinasi linier 2, 3, dan 4 baris serta baris pertama dan kedua dalam $G'_{(7)}$ atau $G'_{(8)}$, sehingga 12 kodekata tersebut dapat dibagi dalam 3 kelompok :

(i) $a, a', \overline{a}, \overline{a}'$

(ii) $b, b', \overline{b}, \overline{b}'$ dan

(iii) $a+b, (a+b)', \overline{(a+b)}, \overline{(a+b)}'$

dengan a dan b berturut-turut mewakili $g'_{(l),1}$ dan $g'_{(l),2}$ untuk l = 7, 8 dan u' = $u + g_h$ dimana $u \in U = \{a, b, (a+b)\}$ dan $\overline{v} = v +$ (11111111) dimana $v \in V = U \cup \{a', b', (a+b)'\}$.

Misalkan menganggap setengah bagian kiri dari a (a^L) atau ($g'^{(L)}_{(l),1}$) = (1100) sama dengan setengah bagian kiri dari $cw1$ dan setengah bagian kiri dari b (b^L) atau ($g'^{(L)}_{(l),2}$) = (1010) sama dengan setengah bagian kiri dari $cw2$ untuk (l = 7, 8), sehingga harus membuktikan bahwa setengah bagian kanan dari a (a^R) atau ($g'^{(R)}_{(l),1}$) tidak sama dengan setengah bagian kanan dari $cw1$ dan setengah bagian kanan dari b (b^R) atau ($g'^{(R)}_{(l),2}$) tidak sama dengan setengah bagian kanan dari $cw2$.

a' = a + (00001111) = (a^L $\overline{a^R}$) dan

b' = b + (00001111) = (b^L $\overline{b^R}$)

Menurut aturan no 3 menunjukkan bahwa :

$a^R = g'^{(R)}_{(l),1} \neq (\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_j) = \mathrm{P}_{1,2}$,

$a'^R = \overline{a^R} = \overline{g'^{(R)}_{(l),1}} \neq (\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_j) = \mathrm{P}_{1,2}$,

$b^R = g'^{(R)}_{(l),2} \neq (\mathrm{P}_{i'} + \mathrm{P}_{j'}) = \mathrm{P}_{1,3}$, dan

$b'^R = \overline{b^R} = \overline{g'^{(R)}_{(l),2}} \neq (\mathrm{P}_{i'} + \mathrm{P}_{j'}) = \mathrm{P}_{1,3}$

sehingga a, a', b, b' berbeda dengan $(cw1,\ldots,cw6)$. Kesimpulan yang sama berlaku untuk $\overline{a}, \overline{a}', \overline{b}$, dan $\overline{b}'$, karena misalnya $s \neq t$ tentunya $\overline{s} \neq \overline{t}$. Untuk kelompok yang terakhir, yaitu :

$$(a+b)^{(L)} = a^{(L)} + b^{)L)}$$
$$= (1100) + (1010)$$
$$= (0110)$$
$$(a+b)'^{(L)} = (a+b)^{(L)} + (0000)$$
$$= (a+b)^{(L)}$$
$$= (0110)$$

sama dengan setengah bagian kiri dari $cw6$, sehingga harus membuktikan bahwa setengah bagian kanan dari $(a+b)$ atau $g'^{(R)}_{(l),1}$ + $g'^{(R)}_{(l),2}$ tidak sama dengan setengah bagian kanan dari $cw6$ atau $\mathrm{P}_{2,3}$ dan setengah bagian kanan dari $(a+b)'$ atau $\overline{g'^{(R)}_{(l),1}}$ + $\overline{g'^{(R)}_{(l),2}}$ tidak sama dengan setengah bagian kanan dari $cw6$ atau $\mathrm{P}_{2,3}$.

Menurut aturan no 3 menunjukkan bahwa :

$$(a+b)^R = g'^{(R)}_{(l),1} + g'^{(R)}_{(l),2} \neq (\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_j) + (\mathrm{P}_{i'} + \mathrm{P}_{j'}) = \mathrm{P}_{1,2} + \mathrm{P}_{1,3} = \mathrm{P}_{2,3}$$

$$(a+b)'^R = \overline{g'^{(R)}_{(l),1}} + \overline{g'^{(R)}_{(l),2}} \neq (\mathrm{P}_i + \mathrm{P}_j) + (\mathrm{P}_{i'} + \mathrm{P}_{j'}) = \mathrm{P}_{1,2} + \mathrm{P}_{1,3} = \mathrm{P}_{2,3}$$

Jadi $(a+b)$ dan $(a+b)'$ berbeda dengan $(cw1,\ldots,cw6)$. Kesimpulan yang sama juga berlaku untuk $\overline{(a+b)}$ dan $\overline{(a+b)}'$. Dengan demikian 12 kodekata 2-and-2 dari $G'_{(7)}$ atau $G'_{(8)}$ berbeda dengan 6 kata kode 2-*and*-2 dari G_1, sehingga semua kodekata dengan bobot 4 dari G_1 berbeda dengan $\mathrm{G}'_{(7)}$ atau $\mathrm{G}'_{(8)}$. □

Teorema 3.5 [7] *Kode $\hat{\mathrm{C}}$ dibangun oleh pers (1), dengan G_1 diberikan pada pers (2) dan G'_1 yang diberikan oleh pers (3) yang memenuhi aturan kontruksi adalah kode linier (24, 12, 8) yaitu kode Golay (24, 12, 8).*

Bukti :

Karena kode C dan C' keduanya linier maka penjumlahan dari kode tersebut juga linier. Kode $\hat{\mathrm{C}}$ jelas merupakan kode linier karena $\hat{\mathrm{C}}$ adalah penjumlahan langsung dari C dan C'. Dengan hasil yang diberikan oleh pers (1), kode $\hat{\mathrm{C}}$ adalah kode linier (24, 12).

Sekarang hanya butuh untuk membuktikan jarak minimum dari kode $\hat{\mathrm{C}}$ adalah 8. Jarak minimum dari suatu kode linier sama dengan bobot minimumnya. Bobot minimum $\hat{\mathrm{C}}$ bergantung pada struktur C_1 dan C'_1. Struktur dari kodekata $\hat{\mathrm{C}}$, $\hat{c} = (a+x, b+x, a+b+x)$ dimana **e**$\in \mathrm{C}_1$, untuk **e** = {a, b, a+b} dan **x** $\in \mathrm{C}'_1$. Bobot kodekata $\hat{c}$, $wt(\hat{c}) = wt(a + x) + wt(b + x) + wt(a+b+x)$ dimana $wt(e + x) = wt(e) + wt(x) - wt(e \cap x)$. Bobot kedua kodekata C_1 dan C'_1 adalah 0, 4, atau 8. Untuk $wt(e) = wt(x) = 4$, berdasarkan lemma 2 didapat $wt(e \cap x) \leq 3$, sehingga $wt(e + x) \geq 2$. Ada banyak kasus dalam mencari bobot dari kodekata $\hat{c}$, kita akan membagi menjadi 2 bagian :

- Bagian yang pertama $wt(e) = wt(x) = 4$ dengan $a \neq b$. Pada bagian ini mempunyai 2 sub-kasus, yaitu :
  1. jika $wt(a + x) = 2$ dan $wt(b + x) = 2$, maka kondisi $wt(a + b) = 4$ mengakibatkan $wt(a + b \cap x) = 2$

sehingga memastikan bahwa $wt(a+b+x) = 4$.

2. jika $wt(a + x) = 2$ dan $wt(b + x) = 4$ atau sebaliknya, maka kondisi $wt(a + b) = 4$ mengakibatkan $wt(a+b \cap x) = 3$ atau 1 sehingga $wt(a+b+x) = 2$ atau 6.

Dalam setiap sub-kasus dapat disimpulkan bahwa $wt(e + x) \geq 2$ sehingga kondisi $wt(e + x) \geq 2$ memenuhi kondisi untuk $wt(\hat{c}) \geq 8$.

- Bagian yang kedua adalah kondisi $wt(e)$ dan $wt(x)$ selain kondisi pada bagian diatas. Pada bagian ini mempunyai 3 sub-kasus, yaitu :
  1. jika $wt(a) = wt(b) = wt(x) \neq 4$, mengakibatkan $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{x}$ sehingga $wt(a+b) = 0$, didapat $wt(a + b + x) = 0$ atau 8. Karena $wt(a \cap x) = 0$ atau 8 maka $wt(a + x) = 0$. Jadi didapat $wt(e + x) = 0$ atau 8 sehingga memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.
  2. jika $wt(e) \neq wt(x)$, sub-kasus ini mempunyai 3 kemungkinan, yaitu:
     i. jika $wt(e) = 0$ maka $wt(x) = 4$ atau 8 sehingga $wt(e \cap x) = 0$. Jadi $wt(e + x) = 4$ atau 8.
     ii. jika $wt(e) = 4$ maka $wt(x) = 0$ atau 8 sehingga $wt(e \cap x) = 0$ atau 4. Jadi $wt(e + x) = 4$.
     iii. jika $wt(e) = 8$ maka $wt(x) = 0$ atau 4 sehingga $wt(e \cap x) = 0$ atau 4. Jadi $wt(e + x) = 8$ atau 4.

  Dari ketiga kemungkinan didapat $wt(e + x) = 4$ atau 8 sehingga memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.
  3. $wt(e) = wt(x) = 4$ dengan $e \in \{a, b\}$ dan $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
     Kondisi $wt(e \cap x) \leq 3$ berakibat $wt(e + x) \geq 2$. Karena kondisi $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ mengakibatkan $wt(a + b + x) = 4$, jadi kondisi $wt(e + x) \geq 2$ memenuhi $wt(\hat{c}) \geq 8$.
     Dari kedua bagian diatas dapat disimpulkan $wt(\hat{c}) \geq 8$, sehingga bobot minimum dari kode $\hat{C}$ adalah 8. Dengan demikian kode $\hat{C}$ adalah sebuah kode linier (24, 12, 8) yaitu kode Golay (24, 12, 8). □

Contoh 3.6

Diberikan G_1 sebagai matrik generaor dari kode sistematik (8, 4, 4), yaitu :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan didapat :

$$P = \begin{pmatrix} (1 & 1 & 0 & 1) \\ (0 & 1 & 1 & 1) \\ (1 & 1 & 1 & 0) \\ (1 & 0 & 1 & 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = (P_1, P_2, P_3, P_4)^T$$

Langkah–langkah mendapatkan $G'_{(7)}$ dan $G'_{(8)}$:

- Menentukan $g'^{(L)}_{(7)}$ dan $g'^{(L)}_{(8)}$,Misalkan kita ambil $\mathbf{x}$ = (0101) dan $\mathbf{y}$ = (0011), jadi :

  $g'^{(L)}_{(7),1} = g'^{(L)}_{(8),1} = x = (0101)$, dan

  $g'^{(L)}_{(7),2} = g'^{(L)}_{(8),2} = y = (0011)$

- Menentukan $g'^{(R)}_{(7)}$ dan $g'^{(R)}_{(8)}$

  Berdasarkan Aturan 3 bahwa :

  $g'^{(R)}_{(7),1} \neq P_2 + P_4 = (0111) + (1011) = (1100)$

  $\overline{g'^{(R)}_{(7),1}} \neq P_2 + P_4 = (0111) + (1011) = (1100)$

  Maka $g'^{(R)}_{(7),1}$ terdapat 4 kodekata yang mungkin, yaitu :

  (1010), (1001), (0110), (0101)

  Misalkan diambil $g'^{(R)}_{(7),1}$ = (0110) dan berdasarkan Aturan 2,

  $g'^{(R)}_{(8),1} \neq g'^{(R)}_{(7),1}$ = (0110) dan

  $g'^{(R)}_{(8),1} \neq \overline{g'^{(R)}_{(7),1}}$ = (1001)

  berdasarkan Aturan 3 :

  $g'^{(R)}_{(8),1} \neq P_2 + P_4 = (0111) + (1011) = (1100)$

  $\overline{g'^{(R)}_{(8),1}} \neq P_2 + P_4 = (0111) + (1011) = (1100)$, jadi $g'^{(R)}_{(8),1}$ tinggal mempunyai 2 kodekata yang mungkin, yaitu (1010) dan (0101).

Misalkan diambil $g'^{(R)}_{(8),1}$ = (0101).

Berdasarkan Aturan 2 :

$g'^{(R)}_{(7),2} \neq g'^{(R)}_{(7),1}$ = (0110) dan

$g'^{(R)}_{(7),2} \neq \overline{g'^{(R)}_{(7),1}}$ = (1001)

berdasarkan Aturan 3 :

$$g'^{(R)}_{(7),2} \neq \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4 = (1110) + (1011) = (0101)$$

$$\overline{g'^{(R)}_{(7),2}} \neq \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4 = (1110) + (1011) = (0101),$$

jadi $g'^{(R)}_{(7),2}$ tinggal mempunyai 2 kodekata yang mungkin, yaitu (1100) dan (0011).

Misalkan diambil $g'^{(R)}_{(7),2}$ = (0011).

Berdasarkan Aturan 2 :

$g'^{(R)}_{(8),2} \neq g'^{(R)}_{(7),2}$ = (0011) dan $g'^{(R)}_{(8),2} \neq \overline{g'^{(R)}_{(7),2}}$ = (1100)

berdasarkan Aturan 3 :

$$g'^{(R)}_{(8),2} \neq \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4 = (1110) + (1011) = (0101)$$

$$\overline{g'^{(R)}_{(8),2}} \neq \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4 = (1110) + (1011) = (0101),$$

jadi $g'^{(R)}_{(8),2}$ tinggal mempunyai 2 kodekata yang mungkin, yaitu (1001) dan (0110).

Misalkan diambil $g'^{(R)}_{(8),2}$ = (1001).

Sehingga akhirnya didapatkan :

$$\mathrm{G}'_{(7)} = \begin{pmatrix} g'_{(7),1} \\ g'_{(7),2} \\ g_h \\ g_{w=8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'^{(L)}_{(7),1} & g'^{(R)}_{(7),1} \\ g'^{(L)}_{(7),2} & g'^{(R)}_{(7),2} \\ g_h & g_h \\ g_{w=8} & g_{w=8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{G}'_{(8)} = \begin{pmatrix} g'_{(8),1} \\ g'_{(8),2} \\ g_h \\ g_{w=8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'^{(L)}_{(8),1} & g'^{(R)}_{(8),1} \\ g'^{(L)}_{(8),2} & g'^{(R)}_{(8),2} \\ g_h & g_h \\ g_{w=8} & g_{w=8} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan kerangka matriks generator yang diberikan oleh pers (1), C_{24} kemudian dibangun dengan menggunakan G_1 diatas dan satu dari 2 G'_1 yang dihasilkan diatas.

4. KESIMPULAN

Kode Golay (24, 12, 8) dapat dibangun dengan sebagai hasil dari *direct sum* 2 komponen kode dengan melibatkan 4 komponen kode dengan menerapkan bentuk dari kontruksi *Turyn* atau |a + x|b + x|a + b + x| dimana **a**,**b**$\in$ C_1 dan **x**$\in$ C'_1, disini C_1 dan C'_1 adalah dua kode blok linier (8, 4, 4).

C'_1 sendiri dapat dihasilkan dengan memberikan kerangka matriks generator yang elemen-elemennya memenuhi aturan kontruksi dengan menggunakan kode (8, 4, 4) yang asli sebagai acuannya.

Disini ada 2 C'_1 baru yang berbeda tetapi semuanya ekuivalen dengan C_1 yang asli. Jadi dengan menggunakan matriks generator G_1 dan satu dari 2 G'_1 yang dihasilkan akan membangun kerangka matriks generator kode Golay (24, 12, 8).

Matriks generator kode Golay (24, 12,8) dibangun oleh pers (1) dengan menggunakan G_1 dan $G'_1 = G'_{(7)}$ pada contoh 3

$$\hat{G} = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1&0\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Banerjee, Adrish, (2005), *Some Important Linear Block Codes*, http://home.iitk.ac.in/~adrish/EE321/Lectures/lecture6.pdf.

[2]. Irawanto, B., Rizki, I., (2008), *Membangun Kode Golay (24, 12, 8) dengan Matriks Generator dan Menggunakan Kriteria Permutasi*, JSM VOL 17,No 2 April 2008 FMIPA Universitas Diponegoro.

[3]. Milenkovic, Olgica, (2007), *Coding Theory*, Urbana-Champaign, http://courses.ece.uiuc.edu/ece556/fall2007/lectures/Lecture3.pdf.

[4]. Vanstone, S.A & Oorschot, P. C, (1989), *An Introduction to Error Correcting Codes with Apllications*, London, Kluwer Academic Plublisher.

[5]. Whitcomb, Louis L, *Notes on Kronecker Product*, the John Hopskin University http://guoqians:sun2066102@fraser.sfu.ca/home/guoqians/pub_html/kron_1.pdf.

[6]. Wright, Francis J., (2004), *Linear Algebra I Lecture Notes*, http://centaur.maths.qmul.ac.uk/Lin_Alg_I/Lectures_2004/Lectures_2.pdf.

[7]. X.-H. Peng & P. G. Farrel, (2005), *On Construction of the (24, 12, 8) Golay Codes*, Birmingham.