PERTIDAKSAMAAN AZUMA PADA MARTINGALE UNTUK MENENTUKAN SUPREMUM PELUANG

Sudarno
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, SH Tembalang Semarang 50275

Abstract. Counting probability a two-tailed hypothesis determine level of the significance. This case follows positive and negative random variables. So that the probability distribution is a symmetric. The probability will be counted by Azuma inequality on martingales. The lowest upper bound is a decay exponential function. It is determined in some *a*, *n*, *m*, and ε value by a simulation. The conclusion of this paper is that the random variable value is higher than the probability value (supremum) is lower, vise versa. Therefore, Its property is same as the distribution function.

Key words: Markov Inequality, Martingale, Doob Martingale, Azuma Inequality.

1. PENDAHULUAN

Pada uji hipotesis terdapat tiga macam hipotesa, yaitu uji ekor kanan, uji ekor kiri, dan uji dua ekor. Uji tersebut masing-masing berhubungan dengan daerah penerimaan dan penolakan hipotesis. Daerah tersebut ditentukan oleh batas atas atau batas bawah dari nilai kritis, yang juga berkaitan dengan *p*-value [2].

Misal variable acak X merupakan umur komponen. Peluang komponen mampu hidup sampai suatu waktu t disebut reliabilitas $R(t)$ dari komponen tersebut. Jadi

$$R(t) = P(X \geq t) = \begin{cases} 1 - F(t), & t \geq 0 \\ 1, & t < 0, \end{cases}$$

dengan F adalah fungsi distribusi dari X. Peluang ini merupakan peluang ekor kanan, yaitu pada uji hipotesis berhubungan dengan uji hipotesa ekor kanan. Dengan mengetahui peluang ini, akan dapat dipercaya tingkat umur produk yang dijanjikan [6].

Martingale merupakan kejadian dimana harapan hasil kejadian yang akan datang sama dengan hasil kejadian kemarin. Sedangkan pertidaksamaan Markov merupakan pertidaksamaan untuk menentukan peluang sebelah kanan dari variabel acak tak negatif untuk sembarang konstanta positif [7,8]. Ingin diketahui peluang sebelah kanan dan kiri dari suatu variabel acak, masing-masing bernilai positif dan negatif pada martingale. Batas atas terkecil (*supremum*) menggunakan pertidaksamaan Azuma. Dengan demikian akan dapat ditentukan tingkat signifikan variabel acak tersebut.

2. LANDASAN TEORI

Untuk mengulas materi pada pembahasan martingale perlu beberapa teori berikut ini. Pertama kali diberikan pengertian tentang fungsi konveks.

Definisi 2.1. [1]. Misal $I \subseteq R$ merupakan suatu interval. Fungsi $f : I \to R$ disebut konveks pada I jika untuk sembarang λ yang memenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ dan sembarang titik x_1, x_2 anggota I, berlaku

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Selanjutnya diberikan pertidaksamaan Markov, martingale dan supermartingale.

Lemma 2.1. ([7,8]). Jika X merupakan variable acak nonnegatif, maka untuk sembarang $a > 0$, $P\{X \geq a\} \leq E[X]/a$.

Bukti.

Misal $I\{X \geq a\} = \begin{cases} 1, \text{ jika } X \geq a \\ 0, \text{ jika lainnya.} \end{cases}$

Karena $X \geq 0$, maka diperoleh:

$aI\{X \geq a\} \leq X$

$E[aI\{X \geq a\} \leq E[X]$

$E[I\{X \geq a\} = P\{X \geq a\} \leq E[X]/a$

Definisi 2.2. ([4,8]). Proses Stokhastik $\{Z_n,\ n \geq 1\}$ disebut proses martingale jika $E[|Z_n|] < \infty, \forall n$ dan $E[Z_{n-1} | Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] = Z_n$.

Definisi 2.3. ([8]). Proses Stokhastik $\{Z_n, n \geq 1\}$ yang mempunyai $E[|Z_n|] < \infty$ untuk semua *n* dikatakan supermartingale jika $E[Z_{n+1} | Z_1, ..., Z_n] \leq Z_n$.

Berikut diberikan contoh martingale.

Contoh 1 ([3,8]).

Misal $X, Y_1, Y_2, \ldots$ adalah variable acak sembarang sedemikian hingga $E[|X|] < \infty$, dan $Z_n = E[X | Y_1, \ldots Y_n]$. Maka

$$E[Z_{n+1} | Y_1, \ldots Y_n] = E[E[X | Y_1, \ldots Y_n, Y_{n+1}] | Y_1, \ldots, Y_n] = E[X | Y_1, \ldots Y_n] = Z_n.$$

Sehingga $\{Z_n, n \geq 1\}$ merupakan martingale dan disebut martingale tipe *Doob*.

3. PERTIDAKSAMAAN AZUMA PADA MARTINGALE

Misal $Z_i, i \geq 0$ merupakan barisan martingale dengan syarat nilai variable acaknya berubah secara lambat. Maka pertidaksamaan Azuma dapat dipergunakan untuk menentukan batas peluang kiri dan kanan dari distribusi deviasi. Sebelum membahas hal tersebut, perlu mengerti beberapa lemma berikut ini.

Lemma 3.2. Misal variabel acak *X* sedemikian hingga *E*[*X*]=0 dan $P\{-\alpha \leq X \leq \beta] = 1$. Maka untuk sembarang fungsi konveks *f* berlaku $E[f(x)] \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(-\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(\beta)$.

Bukti.

Karena fungsi *f* konveks, maka untuk daerah $-\alpha \leq x \leq \beta$, fungsi *f* tidak pernah di atas garis lurus yang menghubungkan titik (-α, *f* (-α)) dan (*β*, *f* (*β*)). Persamaan garis lurusnya adalah

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(-\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(\beta) + \frac{1}{\alpha+\beta}[f(\beta) - f(-\alpha)]\, x.$$

Untuk $-\alpha \leq X \leq \beta$, maka

$$f(X) \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(-\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} f(\beta) + \frac{1}{\alpha+\beta}[f(\beta) - f(-\alpha)]\, X.$$

Dengan melakukan ekspektasi, maka lemma terbukti.

Lemma 3.1. Untuk $0 \leq \theta \leq 1$, berlaku $\theta\, \mathrm{e}^{(1-\theta)x} + (1-\theta)\, \mathrm{e}^{-\theta x} \leq \mathrm{e}^{x^2/8}$.

Bukti.

Dengan mengambil $\theta = (1+\alpha)/2$ dan $x = 2\beta$. Akan ditunjukkan bahwa untuk $-1 \leq \alpha \leq 1$, berlaku

$$(1+\alpha)e^{\beta(1-\alpha)} + (1-\alpha)e^{-\beta(1+\alpha)} \leq 2e^{\beta/2}.$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta}\alpha(\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}) \leq 2\, \mathrm{e}^{\{\alpha\beta + \beta^2/2\}}.$$

Pada p*ertidaksamaan yang pertama, benar untuk* α = -1 atau +1 dan β besar (misal $|\beta| \geq 100$). Dengan demikian, jika lemma ini salah, maka fungsi

$$f(\alpha, \beta) = \mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta} + \alpha(\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}) - 2\exp\{\alpha\beta + \beta^2/2\},$$

akan merupakan fungsi maksimum positif di dalam daerah

$$\mathrm{R} = \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 100\}.$$

Dengan mengambil turunan parsial dari f sama dengan 0, yaitu $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$ dan $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, diperoleh masing-masing

$$\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta} + \alpha(\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}) = 2(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{\{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\}}$$

dan $\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta} = 2\,\beta\,\mathrm{e}^{\{\alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\}}$.

Untuk $\beta \neq 0$, kedua persamaan di atas dengan cara dibagi didapat persamaan $1 + \alpha \frac{\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta}}{\mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}} = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$. Ternyata bila $\alpha = 0$ dan $\beta \neq 0$, persamaan ini tidak terselesaikan, yaitu $\beta(\mathrm{e}^{\beta} + \mathrm{e}^{-\beta}) = \mathrm{e}^{\beta} - \mathrm{e}^{-\beta}$. Jika diuraikan di dalam deret Taylor didapat $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i+1}/(2i)! = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i+1}/(2i+1)!$ yang mana jelas tidak mungkin bila $\beta \neq 0$. Jadi, jika lemma bernilai salah, dapat disimpulkan bahwa nilai maksimum positif dari $f(\alpha,\beta)$ terjadi bila β=0. Tetapi $f(\alpha,0)$=0, dengan demikian lemma terbukti.

Berikut ini merupakan pertidaksamaan Azuma yang dipergunakan untuk menentukan peluang batas atas terkecil kiri dan kanan dari variabel acak.

Teorema 3.1. Misal $Z_n, n \geq 1$ merupakan martingale dengan rataan $\mu = E[Z_n]$. Misal $Z_0 = \mu$ dan dianggap bahwa untuk konstanta nonnegative $\alpha_i, \beta_i, i \geq 1$, berlaku $-\alpha_i \leq Z_i - Z_{i-1} \leq \beta_i$. Maka untuk sembarang $n \geq 0$, $a > 0$:

(i) $P\{Z_n - \mu \geq a\} \leq \mathrm{e}^{\left\{-2a^2 / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2\right\}}$.

(ii) $P\{Z_n - \mu \leq -a\} \leq \mathrm{e}^{\left\{-2a^2 / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2\right\}}$.

Bukti.

Pertama dianggap bahwa $\mu = 0$.

Kemudian untuk sembarang $c > 0$, menurut menurut pertidaksamaan Markov berlaku:

$$\begin{aligned} P\{Z_n \geq a\} &= P\{\exp\{cZ_n\} \geq \mathrm{e}^{ca}\} \\ &\leq E[\exp\{cZ_n\}]\,\mathrm{e}^{-ca} \end{aligned}. \qquad (3.1)$$

Untuk mendapatkan batas pada $E[\exp\{cZ_n\}]$, diambil $W_n = \exp\{cZ_n\}$. Perhatikan bahwa W_0=1, dan untuk $n > 0$, $W_n = \exp\{cZ_{n-1}\}\exp\{c(Z_n - Z_{n-1})\}$.

Oleh sebab itu,

$$\begin{aligned} E[W_n / Z_{n-1}] &= \exp\{cZ_{n-1}\} \\ &\quad E\{\exp\{c\{Z_n - Z_{n-1}\}\{/ Z_{n-1}] \\ &\leq W_{n-1}[\beta_n \exp\{-c\alpha_n\} \\ &\quad + \alpha_n \exp\{c\beta_n\}] / (\alpha_n + \beta_n). \end{aligned}$$

dimana pertidaksamaan ini sesuai dengan Lemma 2 karena:

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$ konveks,

(ii) $-\alpha_n \leq Z_n - Z_{n-1} \leq \beta_n$, dan

(iii) $E[Z_n - Z_{n-1} \mid Z_{n-1}] = E[Z_n \mid Z_{n-1}] - E[Z_{n-1} \mid Z_{n-1}] = 0.$

Dengan mengambil ekspektasi, diperoleh

$$\begin{aligned} E[W_n] &\leq E[W_{n-1}](\beta_n \exp\{-c\alpha_n\} \\ &\quad + \alpha_n \exp\{c\beta_n\}) / (\alpha_n + \beta_n). \end{aligned}$$

Karena $E[W_0]$ = 1, dengan iterasi pertidaksamaan ini, diperoleh

$$E[W_n] \leq \prod_{i=1}^{n} \{(\beta_i \exp\{-c\alpha_i\} + \alpha_i \exp\{c\beta_i\}) / (\alpha_i + \beta_i)\}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Persamaan (3.1), didapat bahwa untuk sembarang $c > 0$,

$$\begin{aligned} P\{Z_n \geq a\} &\leq \mathrm{e}^{-ca} \prod_{i=1}^{n} \{(\beta_i \exp\{-c\alpha_i\} + \alpha_i \exp\{c\beta_i\} / (\alpha_i + \beta_i)\} \\ &\leq \mathrm{e}^{-ca} \prod_{i=1}^{n} \exp\{c^2(\alpha_i + \beta_i)^2 / 8\}, \end{aligned}$$

dimana pertidaksamaan pertama sesuai dengan Lemma 3, dengan mengambil $\theta = \alpha_i / (\alpha_i + \beta_i)$ dan $x = c(\alpha_i + \beta_i)$. Maka untuk sembarang $c > 0$,

$$P\{Z_n \geq a\} \leq \exp\left\{-ca + c^2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2 / 8\right\}.$$

Dengan meminimalkan

$-ca + c^2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2 / 8$ diperoleh

$c = 4a / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2$, sehingga berlaku

$$P\{Z_n \geq a\} \leq \exp\left\{-2a^2 / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2\right\}.$$

Jadi untuk $\mu \neq 0$, pada bagian (i) dan (ii) dari pertidaksamaan Azuma masing-masing tinggal menggunakan untuk martingale rataan-nol $\{Z_n - \mu\}$ dan martingale rataan-nol $\{\mu - Z_n\}$. Teorema terbukti.

Contoh 2.

Misal $X_1, \ldots, X_n$ merupakan variable acak sedemikian hingga $E[X_1]=0$ dan $E[X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}] = 0, \quad i \geq 1$.

Jika $\sum_{i=1}^{j} X_i,\ j = 1, \ldots, n$ adalah martingale rataan-nol, dan $-\alpha \leq X_i \leq \beta_i$ untuk semua i, maka berdasarkan pertidaksamaan Azuma bahwa untuk $a > 0$, didapat

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right\} \leq \exp\left\{-2a^2 / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2\right\}$$

dan

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq -a\right\} \leq \exp\left\{-2a^2 / \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2\right\}.$$

Pertidaksamaan Azuma sering dipergunakan bersama dengan martingale tipe Doob. Pembahasan masalah ini dimulai dari proposisi berikut ini.

Proposisi 3.1. Misal $\{Z_n, n \geq 1\}$ merupakan martingale dengan rataan $Z_n = 0$, yang mana $-\alpha \leq Z_n - Z_{n-1} \leq \beta$ untuk semua $n \geq 1$. Maka, untuk sembarang nilai positif a dan b $P\{Z_n \geq a + bn\} \leq \exp\{-8ab/(\alpha+\beta)^2\}$.

Bukti.

Misal, untuk $n \geq 0$, $W_n = e^{\{c(Z_n - a - bn)\}}$ dan untuk $n \geq 1$, didapat hubungan bahwa $W_n = W_{n-1}\, e^{-cb} \exp\{c(Z_n - Z_{n-1})\}$. Sehingga untuk

$$\begin{aligned} E[W_n \mid W_1, \ldots, W_{n-1}] &= W_{n-1}\, e^{-cb} \\ &\quad E[\exp\{c(Z_n - Z_{n-1})\} / Z_1, \ldots, Z_{n-1}] \\ &\leq W_{n-1}\, e^{-cb} [\beta e^{-ca} + \alpha e^{cb}] / (\alpha + \beta) \\ &\leq W_{n-1}\, e^{-cb}\, e^{c^2 (\alpha+\beta)^2 / 8}, \end{aligned}$$

dimana pertidaksamaan pertama berdasarkan Lemma 2, sedangkan yang kedua menggunakan Lemma 3, dengan $\theta = \alpha/(\alpha+\beta)$, $x = c(\alpha+\beta)$. Makanya, dengan mengambil nilai tertentu c yaitu $c = 8b/(\alpha+\beta)^2$ menghasilkan

$E[W_n \mid W_1, \ldots, W_{n-1}] \leq W_{n-1}$.

Sehingga $\{W_n, n \geq 0\}$ merupakan supermartingale. Untuk intejer positif tertentu k, didefinisikan batas waktu berhenti N dengan

$N = \text{Min}\ \{n : Z_n \geq a + bn \text{ atau } n = k\}$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} P\{Z_n \geq a + bN\} &= P\{W_N \geq 1\} \\ &\leq E[W_N] \leq E[W_0], \end{aligned}$$

menurut pertidaksamaan Markov. Sehingga berda-sarkan yang telah diketahui di atas didapat,

$P\{Z_n \geq a + bn\ \exists n \leq k\} \leq e^{-8ab/(\alpha+\beta)^2}$.

Dengan mengambil $k \to \infty$ maka proposisi terbukti.

Contoh 3. [3,8,9].

Andaikan n bola dimasukkan ke dalam m keranjang dengan cara tiap-tiap bola independen, dan berpeluang sama untuk masuk ke dalam sembarang keranjang. Akan dipergunakan pertidaksamaan Azuma untuk mendapatkan batas atas terkecil pelu-ang ekor dari *X*=jumlah keranjang kosong. Misal I{A} merupakan variable indikator untuk kejadian A, maka didapat $X = \sum_{i=1}^{m} \text{I}\{\text{keranjang } i \text{ kosong}\}$, dengan demikian

$$E[X] = m\, P\{\text{keranjang } i \text{ kosong}\}$$
$$= m\,(1-1/m)^n \equiv \mu$$

Sekarang, misal X_j menyatakan keranjang dengan bola ke-j dimasukkan, $j = 1,\ldots,n$, dan didefinisikan martingale tipe Doob dengan mengambil $Z_0 = E[X]$, dan untuk $i > 0$, . $Z_i = E[\,X \,/\, X_1,\ldots,X_i\,]$

Dalam menentukan batas pada $|Z_i - Z_{i-1}|$, untuk $i = 1, |Z_1 - Z_0| = 0$. Sedangkan untuk $i \geq 2$, ambil D menyatakan banyak nilai ber-beda di dalam himpunan $X_1,\ldots,X_{i-1}$. Mak-sudnya D merupakan banyaknya keranjang yang mempunyai sekurang-kurangnya satu bola sesudah bola $i-1$ pertama didistribusi. Karena tiap dari *m* – D keranjang segera kosong dan akan kosong terus dengan peluang $(1-1/m)^{n-i+1}$, didapat

$$E[X / X_1,\ldots,X_{i-1}] = (m-D)\,(1-1/m)^{n-i+1}.$$

Hal lain,

$$E[\,X \,/\, X_1,\ldots,X_i\,] = \begin{cases} (m-D)(1-1/m)^{n-i}, X_i \in (X_1,\ldots X_{i-1}) \\ (m-D-1)(1-1/m)^{n-i}, X_i \notin (X_1,\ldots,X_{i-1}) \end{cases}.$$

Makanya, untuk $i \geq 2$, dua nilai yang mungkin dari $Z_i - Z_{i-1}$ adalah

$$\frac{m-D}{m}(1-1/m)^{n-1} \text{ dan } \frac{-D}{m}(1-1/m)^{n-1}.$$

Karena $1 \leq D \leq \min(i-1, m)$, maka didapat

$$-\alpha_i \leq Z_i - Z_{i-1} \leq \beta_i,$$

dengan

$$\alpha_i = \min\left(\frac{i-1}{m}, 1\right)(1-1/m)^{n-i},$$
$$\beta_i = (1-1/m)^{n-i+1}.$$

Ambil Z_n = X, maka berdasarkan pertidaksamaan Azuma, untuk $a > 0$, didapat

$$P\{X - \mu \geq a\} \leq \exp\{-2a^2 / \sum_{i=2}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2\}$$

dan,

$$P\{X - \mu \leq -a\} \leq \exp\{-2a^2 / \sum_{i=2}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2\}$$

dimana

$$\sum_{i=2}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2 = \sum_{i=2}^{m}\frac{(m+i-2)^2}{(1-1/m)^{2(n-i)}} / m^2$$
$$+ \sum_{i=m+1}^{n}(1-1/m)^2(2-1/m)^2$$

Untuk mengetahui hubungan antara *a* = 1, 2, dan 3 dengan *n*, *m* terhadap peluang ekor kanan (supremum) diberikan pada Tabel 1 [5,8] berikut.

Tabel 1. Hubungan *a*, *n*, *m* terhadap supremum

a	*n*	*m*	**Supremum**
1	10	5	0,832
2	20	15	0,724
3	30	25	0,615
1	100	75	0,986
2	100	75	0,945
3	100	75	0,881

Berdasarkan tabel di atas dapat diperoleh bahwa untuk nilai *a*, *n*, dan *m* makin besar dihasilkan supremum makin menurun. Demikian juga untuk nilai *n* dan *m* konstan tetapi nilai *a* makin besar, nilai supremum makin kecil.

Dari ulasan yang lalu dapat dibuat pertidaksamaan Azuma secara umum dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.

Misal $\{Z_n, n \geq 1\}$ merupakan martingale dengan rataan Z_0 = 0. Jika $-\alpha \leq Z_n - Z_{n-1} \leq \beta$ untuk semua $n \geq 1$, maka untuk sembarang konstanta positif *c* dan intejer positif *m*:

(i) $P\{Z_n \geq nc \, \exists n \geq m\}$
$$\leq \exp\{-2mc^2/(\alpha+\beta)^2\}$$

(ii) $P\{Z_n \leq -nc \, \exists n \geq m\}$
$$\leq \exp\{-2mc^2/(\alpha+\beta)^2\}$$

Bukti.

Untuk membuktikan bagian (i), jika terdapat *n* sedemikian hingga $n \geq m$ dan $Z_n \geq nc$, maka untuk *n*, $Z_n \geq nc \geq mc/2 + nc/2$. Makanya,

$$P\{Z_n \geq nc \, \exists n \geq m\} \leq P\{Z_n \geq mc/2 + (c/2)n\}$$
$$\leq \exp\{-8(mc/2)(c/2)/(\alpha+\beta)^2\}$$
$$= \exp\{-2mc^2/(\alpha+\beta)^2,$$

menurut Proposisi 1.

Untuk membuktikan bagian (ii), adalah ekuivalen dengan bukti pada bagian (i), dengan cara mengganti martingale $-Z_n, n \geq 0$.

Contoh 4.
Misal S_n adalah jumlah muncul gambar dari *n* lemparan koin pertama secara independent, dengan peluang muncul gambar adalah *p*. Pandang peluang berikut

$$P\{|S_n/n - p| > \varepsilon \, \exists n \geq m\}.$$

Ambil

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jika lemparan ke-i muncul gambar} \\ 0, \text{ jika lemparan ke-i muncul angka} \end{cases}.$$

Maka $Z_n \equiv S_n - np = \sum_{i=1}^{n}(X_i - p)$ adalah martingale dengan rataan 0. Untuk $-p \leq Z_n - Z_{n-1} \leq 1-p$, maka $\{Z_n, n \geq 0\}$ merupakan martingale dengan rataan 0, yang memenuhi Teorema 2, dengan $\alpha = p$, $\beta = 1-p$. Sehingga

$$P\{Z_n \geq n\varepsilon \, \exists n \geq m\} \leq \exp\{-2m\varepsilon^2\}$$

ekuivalen dengan

$$P\{S_n/n - p \geq \varepsilon \, \exists n \geq m\} \leq \exp\{-2m\varepsilon^2\}.$$

Hal serupa, berlaku untuk

$$P\{S_n/n - p \geq -\varepsilon \, \exists n \geq m\} \leq \exp\{-2m\varepsilon^2\}.$$

Jadi

$$P\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon \, \exists n \geq m\} \leq 2\exp\{-2m\varepsilon^2\}.$$

Berdasarkan hasil ini dapat dibuat hubungan antara ε, *m*, dan supremum yang diberikan pada Tabel 2 [5,8]:

Tabel 2. Hubungan ε, dan *m* terhadap supremum

ε	*m*	**Supremum**
0,0	50	2
0,1	100	0,2707
0,2	150	1,2288 e-005
0,3	200	4,6390 e-016
0,4	250	3,6097 e-035
0,5	300	1,4350 e-065
0,0	1000	2
0,1	1000	4,1223 e-009
0,2	1000	3,6097 e-035
0,3	1000	1,3428 e-078
0,4	1000	2,1222 e-139
0,5	1000	1,4249 e-217

Berdasarkan tabel di atas dapat ditarik hubungan bahwa untuk nilai ε, dan *m* makin besar dihasilkan supremum makin kecil. Demikian pula untuk nilai *m* konstan tetapi nilai ε makin besar, nilai supremum juga makin kecil.

4. KESIMPULAN

Untuk menaksir peluang supremum dari martingale dapat menggunakan pertidaksamaan Azuma, dengan batas atas merupakan fungsi eksponensial menurun. Fungsi eksponensial ini simetris terhadap sumbu rataan martingale μ. Komputasi ini berlaku untuk menghitung besarnya peluang pada hipotesis dua-ekor, yang merupakan peluang tingkat signifikan pada distribusi kumulatif suatu variabel acak.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R.G. and Sherbert, D.R., (1994), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Devore, J.L., (2004), *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, Six Edition, Thomson Learning, Inc.

[3] Feller, S., (1966), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] Karlin, S. and H. Taylor, (1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Second Edition, Academic, New York.

[5] Moore, H., (2007), *MATLAB for Engineers*, Pearson Prentice Hall, Inc., New Jersey.

[6] Natarajan, A.M., and Tamilarasi, A., (2005), *Probability Random Processes and Queuing Theory*, New Age International Publishers, New Delhi.

[7] Ross, S.M., (1997), *Introduction to Probability Models*, Sixth Edition, Academic Press, New York.

[8] Ross, S.M., (1996), *Stochastic Processes*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[9] Tijms, H.C., (1994), *Stochastic Models, An Algorithmic Approach*, John Wiley & Sons, Inc., New York.