TEOREMA KEKONVERGENAN FUNGSI TERINTEGRAL RIEMANN

Farikhin
Jurusan Matematika FMIPA Undip

Abstrak

Teorema kekonvergenan merupakan bagian yang penting dalam mempelajari teori integral. Limit fungsi barisan fungsi yang terintegral Riemann pada suatu interval belum tentu fungsi tersebut juga terintegral Riemann pada interval itu. Dengan demikian diperlukan syarat lain agar limit fungsi juga terintegral Riemann.
Tulisan ini bertujuan membahas syarat cukup agar limit fungsi dari barisan fungsi yang konvergenan di mana-mana juga terintegral Riemann.
Selanjutnya, dibahas juga syarat cukup agar limit fungsi dari barisan fungsi yang konvergen hampir di mana-mana juga terintegral Riemann.

Kata kunci : *Integral Riemann, terintegral serentak, konvergen hampir di mana-mana.*

1. PENDAHULUAN

Diberikan himpunan bilangan rasional $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ yang termuat di dalam interval tertutup [0,1]. Didefinisikan barisan fungsi pada [0,1] dengan rumus sebagai berikut : $f_n(x) = 1$ untuk $x \in \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ dan $f_n(x) = 0$ untuk nilai x lain.

Jelas bahwa barisan $\{ f_1, f_2, f_3, \dots \}$ merupakan barisan fungsi yang terintegral Riemann pada [0,1]. Tetapi limit fungsinya , yaitu : $f(x) = 1$ untuk x rasional dan $f(x) = 0$ untuk x irrasional, tidak terintegral Riemann pada [0,1].

Limit fungsi dari barisan fungsi yang terintegral Riemann belum tentu terintegral Riemann .

Bullen dan Vyborny (1996), membuktikan kesamaan limit di bawah tanda akan berlaku , jika limit fungsi tersebut terintegral Riemann dan barisan fungsinya terbatas seragam. Persoalan akan lebih menarik apabila syarat cukup limit fungsinya terintegral Riemann dihilangkan. Apakah kesamaan limit di bawah tanda akan berlaku ?

Lee peng-Yee (2000) membuktikan bahwa limit fungsi akan terintegral Riemann apabila barisan fungsi tersebut terbatas seragam.

2. INTEGRAL RIEMANN

Diberikan bilangan positif δ, koleksi D = { a = a_1, a_2, …, a_n = b / x_1, x_2, …, x_n } , dengan x_i elemen di dalam [a,b], dinamakan partisi-δ pada [a,b] jika untuk setiap i berlaku $x_i \in [a_{i-1}, a_i] \subseteq (x_i - \delta, x_i + \delta)$.

Untuk selanjutnya, partisi-δ , D = { a = a_1, a_2, …, a_n=b / x_1, x_2, …, x_n }, pada [a,b] ditulis singkat partisi-δ D = { (x,[u,v]) } pada [a,b].

Fungsi f:[a,b] $\to$ R yang dimaksud dalam makalah ini adalah fungsi terbatas. Fungsi f:[a,b] $\to$ R dikatakan **terintegral Riemann** pada [a,b] jika terdapat bilangan a dengan sifat : untuk setiap bilangan positif ε terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap D = { (x,[u,v]) } pada [a,b] berlaku

$$| (D) \sum f(x)\,(v-u) - a | < \varepsilon.$$

Koleksi semua fungsi yang terintegral Riemann pada interval tertutup merupakan ruang linear (Lee peng yee & Vyborny R, 2000).

3. BARISAN FUNGSI TERINTEGRAL RIEMANN

Barisan fungsi terintegral Riemann { f_n / n=1, 2, … } dikatakan **terintegral Riemann serentak** (***equiintegrable***) pada [a,b] jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ (tidak bergantung n) sedemikian hingga untuk setiap partisi-δ D = { (x,{u,v]) } pada [a,b] berlaku $| (D) \sum f_n(x)\,(v-u) - B_n | < \varepsilon$ untuk setiap n, dengan B_n menyatakan nilai integral Riemann fungsi f_n pada [a,b].

Teorema 3. 1.

Diberikan barisan fungsi { f_n / n=1, 2, … } yang terintegral Riemann dan pada [a,b]. Jika barisan { f_n / n=1, 2, … } memenuhi syarat-syarat :

(i). $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pada [a,b] ,

(ii). { f_n / n=1, 2, … } terintegral Riemann serentak

maka fungsi f terintegral Riemann pada [a,b] dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Bukti.

Bilangan B_n menyatakan nilai integral Riemann f_n pada [a,b] untuk setiap n.

Dari syarat (ii) maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ (tidak bergantung pada n) sedemikian hingga untuk setiap partisi-δ $D = \{ (x,[u,v]) \}$ pada $[a,b]$ berlaku

$| (D) \sum f_n(x) (v-u) - B_n | < \varepsilon/6$

(1)

untuk setiap n = 1, 2, … .

Dari syarat (i) maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ yang sama dan $x \in [a,b]$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga untuk setiap n , m > N berlaku

$| f_n (x) – f_m(x) | < \varepsilon/3(b-a)$

(2)

$| f_n(x) – f(x) | < \varepsilon/6(b-a)$

(3)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$| (D) \sum f_n(x) (v-u) - (D) \sum f_m(x) (v-u) | \leq (D) \sum | f_n(x) - f_m(x) |.(v-u)$$
$$< \varepsilon/3(b-a) (D) \sum (v-u) = \varepsilon/3$$

(4)

Karena $| B_n - B_m | \leq | (D) \sum f_n(x) (v-u) - B_n | + | (D) \sum f_m(x) (v-u) - B_m | +$
$| (D) \sum f_n(x) (v-u) - (D) \sum f_m(x) (v-u) |$

maka $| B_n - B_m | < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, asalkan n, m > N.

Ini membuktikan bahwa barisan $\{ B_n / n = 1, 2, … \}$ merupakan barisan Cauchy di dalam R. Oleh karena R ruang metrik lengkap maka barisan tersebut merupakan barisan konvergen , katakan $\lim_{n \to \infty} B_n = B$.

Jadi untuk bilangan positif ε terdapat bilangan asli N_1 sedemikian hingga untuk $n > N_1$ berlaku $| B_n – B | < \varepsilon/3$

(5)

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 3, 45 - 51, Desember 2004, ISSN : 1410-8518

Selanjutnya akan diperlihatkan B = $\int_a^b f(x)\,dx$. Ambil sebarang D* = {(x,[u,v]} partisi-δ pada [a,b] .   Mengingat (1), (3), dan (5) diperoleh

$$| B - (D^*) \sum f(x)(v-u) | \leq | B_n - B | + | (D) \sum f_n(x)(v-u) - B_n | + (D) \sum | f_n(x) - f(x) |.(v-u)$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6(b-a) (D) \sum (v-u)$$
$$= \varepsilon/3 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon$$

asalkan n > maks{N,N_1} .

Terbukti bahwa f terintegral Riemann pada [a,b] dan B = $\int_a^b f(x)\,dx$. Dengan kata lain,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Bukti selesai. ♦

Teorema berikut memperlihatkan bahwa limit fungsi dari barisan fungsi terintegral Riemann yang konvergen hampir di mana-mana merupakan fungsi yang terintegral Riemann. Lebih lanjut, kesamaan limit di bawah tanda juga masih dipertahankan.

Teorema 3. 2

Diberikan barisan fungsi {f_n / n=1, 2, …} yang terintegral Riemann dan terbatas seragam pada [a,b]. Jika barisan { f_n / n=1, 2, … } memenuhi syarat-syarat :

(i). $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada [a,b],

(ii). { f_n / n=1, 2, … } terintegral Riemann serentak

maka fungsi f terintegral Riemann pada [a,b] dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Bukti.

Bilangan a_n menyatakan nilai integral Riemann f_n pada [a,b] untuk setiap n.

Tulis M > maks { $|f_n(x)|$, $|f(x)|$ } untuk setiap n dan setiap $x \in [a,b]$.

Dari syarat (ii) diperoleh : untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ (tidak bergantung n) sedemikian hingga untuk setiap partisi-δ D = { (x,[u,v]) } pada [a,b] berlaku $\left| (D)\, \Sigma\, f_n(x)(v-u) - a_n \right| < \varepsilon/6$

(1)

Dari syarat (i) maka terdapat himpunan berukuran nol $S \subseteq [a,b]$ sedemikian hingga $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pada [a,b] \ S.

Hal ini berakibat, terdapat bilangan asli N_1 sedemikian hingga untuk setiap n, m > N_1 dan $x \in [a,b] \setminus S$ berlaku

$| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon\, (6b - 6a)^{-1}$

(2)

$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon\, (6b - 6a)^{-1}$

(3)

Karena S himpunan berukuran nol maka untuk bilangan $\varepsilon / (6M+6) > 0$ terdapat koleksi interval terbuka { I_p / p=1,2, … } di dalam [a, b] sedemikian hingga $S \subseteq \cup\, I_p$ dan $\Sigma\, l(I_p) < \varepsilon / (6M+6)$.

Ambil sebarang partisi D = { (x,[u,v]) } pada [a,b].

Untuk $x \in [a,b] \setminus S$ dipilih $[u,v] \subseteq (x - \delta, x + \delta)$, sedangkan untuk $x \in S$ dipilih [u,v] yang termuat di dalam $\cup\, I_p$.

Jika D* = { (x,[u,v]) } sebarang partisi-δ^* pada [a,b] , dengan $\delta^*=\min\{\delta,\varepsilon / (6M+6)\}$ maka mengingat (2), diperoleh

$$| (D^*)\, \Sigma\, f_n(x)(v-u) - (D^*)\, \Sigma\, f_m(x)(v-u) |$$

$$\le (D^*)\sum_{x\in[a,b]\setminus S} | f_n(x) - f_m(x) | (v-u) + (D^*)\sum_{x\in S} | f_n(x) - f_m(x) | (v-u)$$

$$\le \varepsilon\, (6b - 6a)^{-1} (D^*)\sum_{x\in[a,b]\setminus S} (v-u) + 2M\, (D^*)\sum_{x\in S} (v-u)$$

$$< \varepsilon\, (6b - 6a)^{-1}.(b-a) + 2M.\, \Sigma\, l(I_p)$$

$$< \varepsilon/6 + 2M.\, (\varepsilon / (6M+6)) < \varepsilon$$

(4)

Oleh karena $| a_n - a_m | \le | a_n - s_n | + | s_m - s_n | + | a_m - s_m |$ dengan $s_p = (D^*)\, \Sigma\, f_p(x)(v-u)$ dan mengingat (1) dan (4), maka $| a_n - a_m | < 3\varepsilon$. Ini berarti barisan { a_n / n=1, 2, … } merupakan barisan Cauchy.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 7. No. 3, 45 - 51, Desember 2004, ISSN : 1410-8518

Karena R lengkap maka barisan { a_n / n=1, 2, … } konvergen, katakan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Dengan demikian, untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_2 sedemikian hingga untuk setiap $n > N_2$ berlaku $| a_n - A | < \varepsilon/6$ (5)

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ambil sebarang partisi-δ^* $D^* = \{ (x,[u,v]) \}$ pada [a,b]. Mengingat (1), (3), dan (6) maka

$$
\begin{aligned}
&| A - (D^*) \Sigma f(x)(v-u) | \\
&\quad \leq | a_n - A | + |(D^*) \Sigma f_n(x)(v-u) - a_n| + (D^*)\sum_{x\in[a,b]\setminus S} | f_n(x) - f(x) | (v-u) + \\
&\qquad (D^*)\sum_{x\in S} | f_n(x) - f(x) | (v-u) \\
&\quad < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon (6b - 6a)^{-1} (D^*)\sum_{x\in[a,b]\setminus S} (v-u) + 2M (D^*)\sum_{x\in S} (v-u) \\
&\quad < \varepsilon/3 + \varepsilon (6b - 6a)^{-1}. (b-a) + 2M. (\varepsilon / (6M+6)) \\
&\quad < \varepsilon ,
\end{aligned}
$$

asalkan $n > \text{maks} \{ N_1, N_2 \}$.

Terbukti bahwa $A = \int_a^b f(x)\,dx$ dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Bukti selesai. ♦

4. KESIMPULAN

Telah terbukti bahwa limit fungsi dari barisan fungsi terintegral Riemann juga ter integral Riemann, asalkan barisan fungsi tersebut bersifat terintegral serentak. Selanjutnya limit fungsi dari barisan fungsi yang konvergen hampir di mana-mana juga terintegral Riemann, apabila ditambahkan syarat lain, yakni : barisan fungsi yang terbatas seragam.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Peter S. Bullen dari British Colombia University, Vancouver-Canada, yang telah memberikan ilmunya baik berupa paper maupun konsultasi jarak jauhnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bullen PS & Vyborny R, *Arzela's dominated convergence theorem for the Riemann integral*, Bulletino UMI, 1996, p.347-353.

Lee Peng-yee, *The Integral Riemann Revisited* , Calcutta Lectures, 2000, p.1-8. Lee-Peng Yee & Vyborny, R., *Integral : An Aesy Approach After Kurzwiel And Henstock*, Cambridge University Press, UK, 2000.

Soedijono, B., *Beberapa Teorema Kekonvergenan pada Integral AH,* Berkala Ilmiah MIPA , FMIPA-UGM , Yogyakarta, 1994, No.1 Thn.V