

# ANALISIS HUBUNGAN ANTARA PERSAMAAN RICCATI DAN PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA TIPE DUA

AnasKhairur Rijal<sup>1</sup>, Djuwandi<sup>2</sup>, R. HeriSoelistyo U.<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup>JurusanMatematika FSM UniversitasDiponegoro  
Jln. Prof. Soedharto, S.H., Tembalang, Semarang

[akhrijal88plus.media@gmail.com](mailto:akhrijal88plus.media@gmail.com)

**ABSTRACT.** In this paper, a method for finding solution of the Riccati equation is introduced. The Riccati equation is the first order inhomogeneous nonlinear ordinary differential equation (ODE) that can always be transformed into a second order homogeneous linear ODE. Since, every initial value problem (IVP) of the second order linear ODEs can be transformed into a Volterra integral equation (IE) of the second type, evaluate this equation by approximate technique by means, the approximate solution of the Riccati equation can be found. The approximate technique of the Volterra IE has been describe before, is based on the Taylor series expansion and it's modification of the method. Behind the Cramer's rule, an approximate solution of the 2<sup>nd</sup> type Volterra IE is easily can be determine and so, the approximate solution of the Riccati equation can be found. Test example is given to get conclusion about accuracy of the method.

**Keywords:** Riccati equation, 2<sup>nd</sup> type Volterra integral equation, approximate solution, Taylor series expansion, Cramer's rule.

## I. PENDAHULUAN

Dalam kalkulus terdapat sebuah persamaan diferensial yang bernama persamaan Riccati. Persamaan Riccati adalah persamaan diferensial biasa, orde satu, nonlinear, dan nonhomogen. Orang yang sekaligus mempelajari dan menamai persamaan Riccati, ialah Jean Le Rond d'Alembert, matematikawan Perancis [3]. Matematikawan Italia, seperti Jacopo Francesco Riccati dan putranya, Vincenzo Riccati, dan matematikawan Swiss, seperti Leonhard Euler dan beberapa anggota dari keluarga Bernoulli, juga ikut mempelajari persamaan Riccati [2]. Di samping itu, juga ada matematikawan lain, seperti Alexis Claude Clairaut, Joseph Liouville, Emil Weyr, dan Charles Emile Picard, yang ikut mempelajari persamaan Riccati.

Diketahui, bahwa solusi eksak atau solusi analitik dalam bentuk eksplisit dari persamaan Riccati tidak tersedia [1]. Namun, melalui suatu teknik yang disebut dengan aproksimasi, solusi hampiran dalam representasi numerik dari persamaan Riccati dapat dicari. Melalui sebuah hubungan dalam suatu transformasi, pencariannya solusi dengan teknik tersebut,

dapat dilakukan. Diketahui, bahwa persamaan Riccati dapat ditransformasikan ke dalam suatu persamaan integral Volterra tipe dua [1, 4, 5], dan menyelesaikan persamaan integral Volterra tipe dua tersebut dengan menggunakan teknik aproksimasi, akan membawa pada solusi hampiran dari persamaan Riccati.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 2.1 Persamaan Riccati

Persamaan Riccati adalah persamaan diferensial yang berbentuk

$$w'(x) = p(x) + q(x)w + r(x)w^2, \quad (2.1)$$

dengan

$$p(x) \neq 0. \quad (2.2)$$

Misalkan persamaan (2.1) dengan (2.2) mempunyai isolusiberupa

$$w = -\frac{y'(x)}{r(x)y}, \quad (2.3)$$

dengan

$$r(x)y \neq 0, \quad (2.4)$$

substitusipersamaan (2.3) dengan (2.4) ke dalam persamaan (2.1) dengan (2.2),

menghasilkansuatu persamaan baru yang berbentuk

$$y''(x) - \left[ q(x) + \frac{r'(x)}{r(x)} \right] y'(x) + p(x)r(x)y = 0, \quad (2.5)$$

dengan

$$y''(x) = -w'(x)r(x)y + \frac{r'(x)y'(x)}{r(x)} + \frac{[y'(x)]^2}{y}. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.5) merupakan sebuah persamaan diferensial biasa, orde dua, linear,

dan homogen dari persamaan (2.1).

Menyelesaikan persamaan (2.5),

berarti membawa pada solusi dari persamaan (2.1)

dan menyelesaikan persamaan tersebut, dapat dilakukan melalui hasil transformasinya, yaitu suatu persamaan integral Volterra tipe dua.

## 2.2 Suatu Persamaan Integral Volterra Tipe Dua

Diketahui, bahwa setiap persamaan diferensial biasa, orde dua, linear, dapat ditransformasikan ke dalam suatu persamaan integral Volterra tipe dua, melalui masalah nilai awalnya. Diberikan masalah nilai awal dari persamaan (2.5),

yaitu menyelesaikan persamaan tersebut dengan kondisi awal sebagai berikut:

$$y_0 = 1, \quad (2.7)$$

dan

$$y_1 = -r(0)w(0), \quad (2.8)$$

yang relatif terhadap  $x = 0$  dan

$$y = e^{-\int_0^x r(t)w(t)dt}. \quad (2.9)$$

Integrasi pertama dari persamaan (2.5) dengan kondisi awal (2.7) dan (2.8), dari 0 hingga  $x$ , menghasilkan suatu bentuk yang baru untuk persamaan (2.5), yaitu

$$y'(x) - \left[ q(x) + \frac{r'(x)}{r(x)} \right] y + \int_0^x \left\{ q'(t) + \frac{r''(t)r(t) - [r'(t)]^2}{r^2(t)} \right\} y(t) dt + \int_0^x p(t)r(t)y(t)dt + q(0) + \frac{r'(0)}{r(0)} + r(0)w(0) = 0 \quad (2.10)$$

Integrasi pertama dari persamaan (2.10) dengan kondisi awal (2.7), dari 0 hingga  $x$ , menghasilkan suatu bentuk yang baru untuk persamaan (2.10), yaitu

$$y + \int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad (2.11)$$

dengan

$$K(x,t) = (x-t) \left\{ q'(t) + \frac{r''(t)r(t) - [r'(t)]^2}{r^2(t)} + p(t)r(t) \right\} - \left[ q(t) + \frac{r'(t)}{r(t)} \right], \quad (2.12)$$

dan

$$f(x) = 1 - \left[ q(0) + \frac{r'(0)}{r(0)} + r(0)w(0) \right] x. \quad (2.13)$$

Persamaan (2.11) dengan (2.12) dan (2.13) merupakan sebuah persamaan integral Volterra tipe dua dari persamaan Riccati (2.1). Menyelesaikan persamaan (2.11) dengan (2.12) dan (2.13), berarti akan membawapada solusi dari persamaan (2.5) dan solusi dari persamaan (2.1).

Pertama-tama, mengekspansikan deret Taylor

$$y(t) \approx y(x) + y'(x)(t-x) + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x)(t-x)^n, \quad (2.14)$$

ke dalam persamaan (2.11), menghasilkan persamaan

$$y^{(0)}(x) + \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} y^{(j)}(x) \int_0^x K(x,t)(x-t)^j dt = f(x), \quad (2.15)$$

dengan  $y^{(j)}$  menyatakan turunan ke- $j$  dari  $y$ , untuk  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Selanjutnya, mengintegrasikan persamaan (2.11), dari 0 hingga  $x$ , sebanyak  $n$ -kali dan kemudian, mengekspansikan deret (2.14) ke dalam tiap-tiap hasil integrasi tersebut, bersama-sama dengan persamaan (2.15), menghasilkan  $(1+n)$ -buah persamaan yang dalam sebuah persamaan matriks, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Z_n(x) \cdot \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{f}_n(x), \quad (2.16)$$

dengan

$$Z_n(x) = \begin{pmatrix} z_{00}(x) & z_{01}(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ z_{10}(x) & z_{11}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n0}(x) & z_{n1}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

dan

$$\mathbf{f}_n(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_{(n)}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

untuk

$$z_{0j}(x) = \frac{(-1)^j}{j!} \left[ \delta_{0j} + \int_0^x K(x,t)(x-t)^j dt \right], \quad (2.20)$$

dan

$$z_{ij}(x) = \frac{(-1)^j}{j!} \left[ \frac{x^{i+j}}{i+j} + \int_0^x K_{(i)}(x,t)(x-t)^j dt \right]. \quad (2.21)$$

Integral ke- $i$  dari persamaan (2.11) dan ekspansi deret (2.14) kedalam integral ke- $i$  dari persamaan tersebut, berturut-turut, diperlihatkan oleh berikut:

$$\int_0^x (x-t)^{i-1} y(t) dt + \int_0^x K_{(i)}(x,t) y(t) dt = f_{(i)}(x), \quad (2.22)$$

dengan

$$K_{(i)}(x,t) = \int_t^x (x-s)^{i-1} K(s,t) ds, \quad (2.23)$$

dan

$$f_{(i)}(x) = \int_0^x (x-t)^{i-1} f(t) dt, \quad (2.24)$$

dan ekspansinya, adalah

$$\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} y^{(j)}(x) \left[ \frac{x^{i+j}}{i+j} + \int_0^x K_{(i)}(x,t)(x-t)^j dt \right] = f_{(i)}(x). \quad (2.25)$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, solusi hampiran dari persamaan (2.11), ialah

$$y(x) = \frac{\det(Z_{n0}(x))}{\det(Z_n(x))}, \quad (2.26)$$

dengan

$$Z_{n0}(x) = \begin{pmatrix} f(x) & z_{01}(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ f_{(1)}(x) & z_{11}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(n)}(x) & z_{n1}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

### 2.3 Solusi Hampiran dari Persamaan Riccati

Berdasarkan persamaan (2.3), solusi hampiran dari persamaan Riccati (2.1), dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w = -\frac{y'(x)}{r(x)y} \approx w_n(x) = -\frac{y'(x)}{r(x)y(x)} = -\frac{\det(Z_{n1}(x))}{r(x) \cdot \det(Z_{n0}(x))}, \quad (2.28)$$

dengan

$$y'(x) = \frac{\det(Z_{n1}(x))}{\det(Z_n(x))}, \quad (2.29)$$

dan

$$Z_{n1}(x) = \begin{pmatrix} z_{00}(x) & f(x) & \cdots & z_{0n}(x) \\ z_{10}(x) & f_{(1)}(x) & \cdots & z_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n0}(x) & f_{(n)}(x) & \cdots & z_{nn}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

### 2.4 Tes atau Uji Metode

Diberikan persamaan Riccati sebagai berikut:

$$w' = 1 + 2w - w^2, \quad (2.31)$$

dengan

$$w(0) = 0. \quad (2.32)$$

Berdasarkan metode yang telah diberikan, dengan menggunakan program Maple, diperoleh solusi hampiran dari persamaan Riccati (2.31), untuk  $n = 2, 3, \text{ dan } 5$ , sebagai berikut:

Untuk  $n = 2$

$$w_2 = \frac{10x(-60 + 18x - 9x^2 + x^3)}{-600 + 720x - 630x^2 + 200x^3 - 31x^4 + 2x^5}. \quad (2.33)$$

Untuk  $n = 3$

$$w_3 = \frac{6x(-11760 + 1680x - 2380x^2 + 378x^3 - 55x^4 + 3x^5)}{(-70560 + 80640x - 73080x^2 + 24528x^3 - 6606x^4 + 744x^5 - 55x^6 + 2x^7)}. \quad (2.34)$$

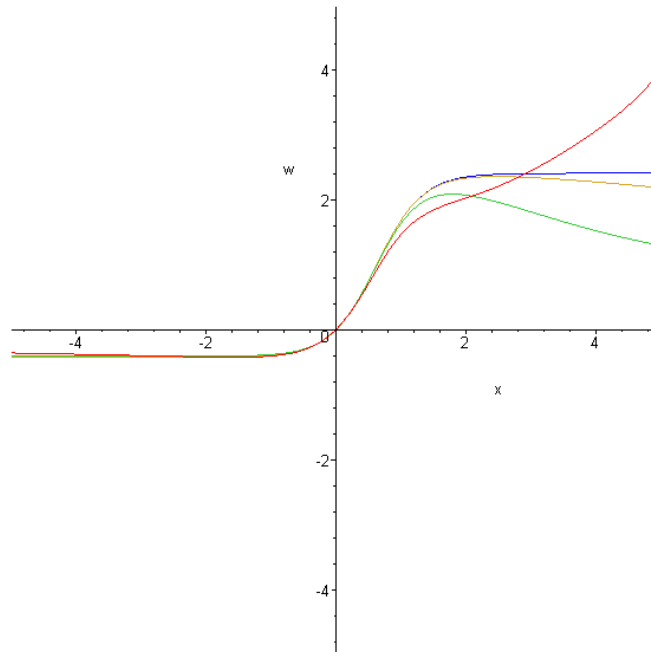
Untuk  $n = 5$

$$w_5 = \frac{40x(-131725440 + 11975040x - 34927200x^2 + 2993760x^3 - 1698624x^4 + 136080x^5 - 18342x^6 + 918x^7 - 44x^8 + x^9)}{(-70560 + 80640x - 73080x^2 + 24528x^3 - 6606x^4 + 744x^5 - 55x^6 + 2x^7)}. \quad (2.35)$$

Diketahui, bahwa solusi eksak atau solusi analitik dalam bentuk eksplisit, dari persamaan (2.31), ialah

$$w = 1 + \sqrt{2} \tanh \left[ \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right], \quad (2.36)$$

sehingga dapat disajikan data grafik dan data numerik, dari persamaan (2.33) hingga persamaan (2.36), ialah sebagai berikut:



**Gambar 2.1: Grafik Persamaan (2.33) - (2.36).**

Keterangan:

— : Grafik persamaan (2.33)

— : Grafik persamaan (2.34)

— : Grafik persamaan (2.35)

— : Grafik persamaan (2.36)

**Tabel 2.1: Representasi Numerik dari Solusi Persamaan (2.31).**

$x$	Solusi Eksak $w(x)$	Solusi Hampiran $w_n(x)$		
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$
0,1	0,1102951967	0,1091343641	0,1102679419	0,1102951910
0,2	0,2419767992	0,2366397292	0,2417296169	0,2419765854
0,3	0,3951048481	0,3814726997	0,3941702953	0,3951030420
0,4	0,5678121656	0,5407149062	0,5653650029	0,5678038352
0,5	0,7560143925	0,7095158598	0,7508166276	0,7559870332
0,6	0,9535662155	0,8815117494	0,9439619106	0,9534942556



### III. KESIMPULAN

Terdapat hubungan antar persamaan Riccati dan persamaan integral Volterra tipe dua, yaitu persamaan Riccati dapat ditransformasikan ke dalam suatu persamaan integral Volterra tipe dua. Dari hubungan tersebut, dapat diperoleh sebuah metode untuk menentukan solusi hampiran dari persamaan Riccati, yaitu dengan menyelesaikan terlebih dahulu persamaan integral Volterra tipe dua melalui teknik aproksimasi. Dari hasil tes diperoleh, bahwa metode cukup akurat untuk memberikan solusi yang mendekati solusi analitik dari persamaan Riccati pada beberapa titik dalam sebuah domain.

### IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Al Bastami, Anas, Milivoj R. Belic & Nikola Z. Petrovic. 2010. "Special Solutions of The Riccati Equation with Applications to The Gross-Pitaevskii Nonlinear PDE". *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2010, No. 66, pp. 1 – 10. Dalam <http://ejde.math.txstate.edu>.
- [2] Bittanti, S. 1996. "History and Prehistory of the Riccati Equation". Dalam <http://corsi.dei.polimi.it/IMAD/Riccati.pdf>.
- [3] Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- [4] Shestopalov, Yury V. & Yury G. Smirnov. 2002. *Integral Equations*. Karlstad: Karlstad University, Division for Engineering Science, Physics, and Mathematics.
- [5] Wazwaz, Abdul-Majid. 2011. *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*. Beijing: Higher Education Press.