BILANGAN DOMINASI EKSENTRIK TERHUBUNG pada GRAF

Tito Sumarsono[1], R. Heri Soelistyo[2], Y.D. Sumanto[3]
Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H. Tembalang Semarang

titosumarsono69@gmail.com

ABSTRACT. Given a graph $G = (V, E)$, comprising a set V of vertices and a set E of edges. A set $D \subseteq V(G)$ is a dominating set of G, if every vertex in $V - D$ is adjacent to at least one vertex in D. The cardinality of minimum dominating set of G it's domination number and is denoted by $\gamma(G)$. A set $D \subseteq V(G)$ is a eccentric dominating set if D is an dominating set of G and for every v in $V - D$ there exist at least one eccentric point of v in D. The cardinality of minimum eccentric dominating set of G it's eccentric domination number and is denoted by $\gamma_{ed}(G)$. A set $D \subseteq V(G)$ is a connected eccentric dominating set if D is an eccentric dominating set of G and the induced subgraph $< D >$ is connected. The cardinality of minimum connected eccentric dominating set of G it's connected eccentric domination number and is denoted by $\gamma_{ce}(G)$. In this paper we discuss connected eccentric dominating set and connected eccentric domination number on special graphs which are complete graph, star graph, complete bipartite graph, cycel graph and wheel graph.

Keywords : eccentric dominating set, eccentric domination number, connected eccentric dominating set, connected eccentric domination number

I. PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 ketika menyelesaikan kasus Jembatan Konigsberg. Masalah Jembatan Konigsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi di tempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dan solusi yang dia tawarkan saat ini dikenal dengan teori graf.

Teori dan aplikasi graf mengalami perkembangan dari tahun ke tahun. Salah satu topik dalam teori graf yang masih dapat dikembangkan secara luas adalah bilangan dominasi.

Pada beberapa skripsi sebelumnya telah dibahas mengenai bilangan dominasi, diantaranya "Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik" oleh Budi Santoso pada tahun 2012 [1], "Penentuan Bilangan Dominasi *Complementary Tree* Terhubung-3 pada Graf" oleh Efni Agustiarini pada tahun 2015 [2] dan "Penjumlahan Bilangan Dominasi Ganda dan Konektivitas Pada Graf" oleh Ruth Anita Hosiana Simamora pada tahun 2015 [3].

Pada tugas akhir ini dibahas himpunan dan bilangan dominasi eksentrik terhubung pada graf lengkap, graf *star*, graf *bipartit* lengkap, graf *cycle* dan graf *wheel.*

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Himpunan Dominasi Eksentrik terhubung

Definisi 3.1.1 [7]

Suatu himpunan $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi eksentrik jika D adalah himpunan dominasi dari G dan juga untuk setiap titik v di $V - D$ terdapat setidaknya satu titik eksentrik dari v di D. Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi eksentrik disebut bilangan dominasi eksentrik dari G dan dinotasikan sebagai $\gamma_{ed}(G)$.

Definisi 3.1.2 [7]

Suatu himpunan $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi eksentrik terhubung jika D adalah himpunan dominasi eksentrik dari G dan juga *induced* subgraf $< D >$ terhubung. Kardinalitas dari setiap himpunan dominasi eksentrik terhubung minimum disebut bilangan dominasi eksentrik terhubung dari G dan dinotasikan sebagai $\gamma_{ce}(G)$.

2.2 Bilangan Dominasi Eksentrik Terhubung pada Graf Khusus

Teorema 3.2.1 [7]

Bilangan dominasi eksentrik terhubung graf lengkap K_n adalah $\gamma_{ce}(K_n) = 1$.

Bukti:

Diambil sebarang $u \in V(K_n)$. Karena K_n adalah graf lengkap maka untuk setiap$v \in V(K_n) - \{u\}$ *adjacent* dengan u sehingga $\{u\}$ merupakan himpunan dominasi dari K_n. Karena setiap titik di K_n mempunyai eksentrisitas 1 maka titik u juga merupakan titik eksentrik dari setiap titik di $V(K_n) - \{u\}$ sehingga untuk setiap $v \in V(K_n) - \{u\}$, $u \in E(v)$. Jadi $D = \{u\}$ merupakan himpunan dominasi eksentrik terhubung. Oleh karena itu bilangan dominasi eksentrik terhubung graf lengkap $\gamma_{ce}(K_n) = 1$.

Teorema 3.2.2 [7]

Bilangan dominasi eksentrik terhubung graf *star* $K_{1,n}$ adalah $\gamma_{ce}(K_{1,n}) = 2$ jika $n \geq 2$.

Bukti:

Diberikan graf star $K_{1,n}, n \geq 2$ dengan himpunan titik $V(K_{1,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(K_{1,n}) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_n$. Diambil sebarang $u \in V(K_{1,n}) - \{v\}$. Misal $S = \{u, v\}$, dimana u titik sebarang dan v titik pusat graf *star* $K_{1,n}$ dan setiap titik di $K_{1,n}$ selain titik pusat v mempunyai eksentrisitas 2 dan u merupakan titik eksentrik dari setiap titik $w \in K_{1,n} - S$. Karena titik u dan v terhubung maka S merupakan himpunan dominasi eksentrik terhubung. Oleh karena itu γ_{ce} $(K_{1,n})$ = 2 jika $n \geq 2$.

Teorema 3.2.3 [7]

Bilangan dominasi eksentrik terhubung graf *bipartit* lengkap $(K_{m,n})$ adalah

$\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 1$, jika $m = 1$ dan $n = 1$.

$\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 2$, jika $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

Bukti:

Misal $V(K_{m,n})$ dipartisi menjadi 2 himpunan titik, yaitu $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dengan himpunan sisi $E(K_{m,n}) = \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, \dots, v_n; u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, \dots, u_2v_n;\ u_mv_1, u_mv_2, u_mv_3, \dots, u_mv_n\}$.

Kasus I:

Jika $m = 1$ dan $n = 1$ maka $K_{1,1} = K_2$. Dengan menggunakan Teorema 3.3.2 diperoleh $\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 1$.

Kasus II:

Jika $m \geq 1, n \geq 2$. Setiap titik di V_1 *adjacent* dengan n titik di V_2 dan setiap titik di V_2 *adjacent* dengan *m* titik di V_1. Ambil sebarang $u, v \in D \subseteq V(K_{m,n})$ dimana $u \in V_1$ dan $v \in V_2$. Karena $K_{m,n}$ adalah graf *bipartit* lengkap, maka *induced* subgraph $< D >$ terhubung. Akan ditunjukkan bahwa $D = \{u, v\}$ merupakan himpunan dominasi eksentrik. Karena $K_{m,n}$ adalah graf *bipartit* lengkap, maka u *adjacent* dengan setiap titik di V_2 dan juga merupakan titik eksentrik dari semua titik $V_1 - \{u\}$ demikian juga v *adjacent* dengan setiap titik di V_1 dan juga merupakan titik eksentrik dari semua titik di $V_2 - \{v\}$, sehingga $D = \{u, v\}$ merupakan himpunan dominasi eksentrik terhubung. Oleh karena itu, $\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 2$, jika $m \geq 1, n \geq 2$.

Teorema 3.2.4 [7]

Bilangan dominasi eksentrik terhubung graf *cycle* C_n adalah $\gamma_{ce}(C_n) = n - 2$ jika $n \geq 3$.

Bukti:

Diberikan graf *cycle* C_n dengan $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Ambil sebarang $v_i \in V(C_n)$ tulis $D_1 = \{v_i\}$, karena C_n adalah graf *cycle* , maka v_i *adjacent* dengan v_{i-1} dan v_{i+1}, tetapi v_i tidak *adjacent* dengan v_{i+2}. Sehingga $D_1 = \{v_i\}$ bukan merupakan himpunan dominasi eksentrik. Oleh karena itu bentuk himpunan baru $D_2 = \{v_i, v_{i+1}\}$ dimana v_i *adjacent* dengan v_{i-1} dan v_{i+1} *adjacent* dengan v_i dan v_{i+2}, tetapi v_{i+1} tidak *adjacent* dengan v_{i+3}. Sehingga $D_2 = \{v_i, v_{i+1}\}$ bukan merupakan himpunan dominasi eksentrik. Proses ini berulang sampai diperoleh $D_{n-2} = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_{i-3}\}$ dimana v_i *adjacent* dengan v_{i-1} dan v_{i+1} dan v_{i-3} *adjacen*t dengan v_{i-2}. Sehingga $D_{n-2} = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_{i-3}\}$ merupakan himpunan dominasi eksentrik dari graf *cycle* C_n. Oleh karena itu $\gamma_{ce}(C_n) = n - 2$ jika $n \geq 3$.

Kasus I : n genap

Karena C_n adalah graf *cycle* maka eksentrisitas setiap titik di C_n sama dengan radius(r) di C_n, yaitu $\frac{n}{2}$. Titik eksentrik dari v_i adalah $v_{i+r} mod(n)$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, n$.

Kasus II : n ganjil

Karena C_n adalah graf *cycle* maka eksentrisitas setiap titik di C_n sama dengan radius(r) di C_n, yaitu $\frac{1}{2}(n-1)$. Titik eksentrik v_i adalah $v_{i+r} mod(n)$ dan $v_{i+(n-r)} mod(n)$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots, n$.

Teorema 3.2.5 [7]

Bilangan dominasi eksentrik terhubung graf *wheel* W_n adalah

$\gamma_{ce}(W_n) = 1$, jika $n = 3$.

$\gamma_{ce}(W_n) = 2$, jika $n = 4$.

$\gamma_{ce}(W_n) = 3$, jika $n \geq 5$.

Bukti:

Kasus I: $n = 3$

Graf *wheel* $W_3 = K_4$. Dengan menggunakan Teorema 3.3.2 akan diperoleh $\gamma_{ce}(W_3) = 1$.

Kasus II: $n = 4$

Misal $S = \{u, v\}$, dimana u dan v titik sebarang dalam graf *wheel* W_4. Titik u dan v *adjacent* dan bukan merupakan titik pusat. Setiap titik di W_n selain titik pusat mempunyai eksentrisitas 2, u dan v merupakan titik eksentrik dari setiap titik $w \in K_{1,n} - S$. Karena titik u dan v terhubung maka S merupakan himpunan dominasi eksentrik terhubung terhubung minimum. Oleh karena itu γ_{ce} (W_4) = 2.

Kasus III: $n \geq 5$

Misal $S = \{u, v, w\}$ dimana v titik pusat dan u, w dua titik sebarang yang *adjacent.* dengan titik $x \in W_n - S$. Setiap titik di W_n mempunyai eksentrisitas 2, u dan w merupakan titik eksentrik dari setiap titik $x \in W_n - S$. Karena titik u, v dan w terhubung maka S merupakan himpunan dominasi eksentrik terhubung minimum. Oleh karena itu, $\gamma_{ce}(W_n) = 3$.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai himpunan serta bilangan dominasi eksentris terhubung pada graf dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Untuk graf lengkap K_n maka $\gamma_{ce}(K_n) = 1$.
2. Untuk graf *star* $K_{1,n}$ dengan *order* $n \geq 2$, maka $\gamma_{ce}(K_{1,n}) = 2$.
3. Untuk graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ jika *order* $m = n = 1$, maka

   $\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 1$ dan jika *order* $m \geq 1, n \geq 2$ maka $\gamma_{ce}(K_{m,n}) = 2$.
4. Untuk graf *cycle* C_n dengan *order* $n \geq 3$, maka $\gamma_{ce}(C_n) = n - 2$.
5. Untuk graf *wheel* W_n jika *order* $n = 3$, maka $\gamma_{ce}(W_n) = 1$;

   jika *order* $n = 4$, maka $\gamma_{ce}(W_n) = 2$; dan jika *order* $n \geq 5$, maka $\gamma_{ce}(W_n) = 3$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Santoso, Budi. 2012. *Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik*. Skripsi. Jurusan Matematika FSM. Universitas Diponegoro. Semarang.

[2] Agustiarini , Efni.2015. *Penentuan Bilangan Dominasi Complementary*

Tree Terhubung-3 pada Graf. Skripsi. Jurusan Matematika FSM. Universitas Diponegoro. Semarang.

[3] Simamora , Ruth Anita Hosiana. 2015. *Penjumlahan Bilangan Dominasi Ganda dan Konektivitas Pada Graf* . Skripsi. Jurusan Matematika FSM. Universitas Diponegoro. Semarang.

[4] Harary, Frank. 1969. *GRAPH THEORY*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

[5] Kamath, S.S., R.S.Bhat & Surekha R.Bhat. 2012. S*trong (weak) Edge Vertex Mixed Domination Number of a Graph*. Int.J. Mathematical sciences. Vol 11, no 3-4, 433-444.

[6] Wilson, j.Robin and John J.Watkins. 1990. *"Graphs An Inroductory Approach"*. New York: University Course Graphs, Network, and Design.

[7] R. Jahir Hussain, A. Fathima Begam. 2015. *Connected Eccentric Domination Number in Graphs.* International Journal of Innovative Trends in Engineering (IJITE). Vol 04, No 01.