METODE MEHAR UNTUK SOLUSI OPTIMAL *FUZZY* DAN ANALISA SENSITIVITAS PROGRAM LINIER DENGAN VARIABEL *FUZZY* BILANGAN *TRIANGULAR*

Marlia Ulfa[1], Bambang Irawanto[2], Sunarsih[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang, 50275

marliaulfa31@yahoo.co.id, b_irawanto@yahoo.co.id

ABSTRACT. Fuzzy linear programming problems containing closely with uncertainty about the parameters. Changes in the value of the parameters without changing the optimal solution or change the optimal solution is called sensitivity analysis. Sensitivity analysis is a basic for studying the effect of the changes that occur to the optimal solution. Linear programming with fuzzy variable is a form of fuzzy linear program is not fully because there are objective function coefficients and coefficients of constraints that are crisp numbers. Resolving the problem of linear programming with fuzzy variables by using mehar method will get solutions and optimal fuzzy value and solutions and optimal crisp value. To solve the problem of linear program with fuzzy variable is using mehar, must be converted beforehand in the form of crisp linear programming. This thesis explores mehar method to solve linear programming problems with fuzzy variables with triangular number and a sensitivity analysis on the optimum solution FVLP so that when there is a change of data of the problem, new solution will remain optimal.

Keywords: Sensitivity Analysis, Fuzzy Variable Linear Programming, Mehar Method, Triangular Fuzzy Number.

I. PENDAHULUAN

Pemrograman linier adalah suatu cara untuk menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi linier dibawah kendala-kendala tertentu yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linier. Program linier berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier [3]. Dalam banyak aplikasi, fungsi objektif maupun kendala-kendalanya seringkali tidak dapat dinyatakan dengan formula yang tegas tetapi kabur. Oleh karena itu pemrograman linier (tegas) dikembangkan menjadi pemrograman linier *fuzzy*. Program linier *fuzzy* seringkali dihadapkan pada model matematika yang bergantung dari pengaturan sumber pada suatu waktu. Kadang terdapat perubahan atas beberapa parameter yang terkandung dalam model. Perubahan nilai parameter, baik keuntungan, biaya, maupun kapasitas sumber daya dapat mempengaruhi perencanaan yang sudah disusun. Dalam mengatasi kesulitan tersebut, timbullah istilah analisa sensitivitas yang membahas mengenai perubahan nilai parameter-parameter model dalam batas tertentu tanpa mengubah solusi optimal. Amit Kumar dan Neha Bhatia telah membahas metode untuk menyelesaikan masalah Analisa Sensitivitas *fuzzy* dengan bilangan *trapezoidal fuzzy* [2]. Analisa sensitivitas pada masalah program linier *fuzzy* tidak penuh dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *trapezoidal fuzzy* (FNLP) telah dibahas oleh Nofita Anggraini, oleh karena itu dalam tulisan ini, penulis membahas metode mehar untuk menemukan solusi optimal *fuzzy* dan melakukan analisa sensitivitas pada masalah program linier dengan variabel *fuzzy* bilangan *triangular*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Bilangan *Triangular Fuzzy*

Himpunan yang memiliki batasan yang tegas antara objek-objek yang merupakan anggota himpunan atau bukan merupakan anggota himpunan disebut himpunan tegas *(crisp)* [5]. Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara tegas, terdapat suatu permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas sehingga muncullah himpunan *fuzzy* [5].

Konsep bilangan *fuzzy* muncul dari aplikasi teori logika *fuzzy* dalam bentuk bilangan yang tidak tegas. Dalam hal ini bilangan *fuzzy* yang digunakan adalah bilangan *triangular fuzzy* [5].

Definisi 2.10. [1] Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}=(a,b,c)$ dikatakan bilangan *triangular fuzzy* jika memenuhi fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \dfrac{(x-c)}{(b-c)}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Definisi 2.11. [1] Bilangan *triangular fuzzy* (a,b,c) dikatakan bilangan *fuzzy* non-negatif jika a$\geq$ 0.

Definisi 2.12. [1] Dua buah bilangan *triangular fuzzy* $\tilde{A}$ = (a,b,c) dan $\tilde{B} = (e, f, g)$ dikatakan sama jika a = e, b = f dan c = g.

Definisi 2.13. [1] Diberikan dua buah bilangan *triangular fuzzy* yaitu $\tilde{A} = (a, b, c)$ dan $\tilde{B} = (e, f, g)$,dengan $\tilde{A}, \tilde{B} \in F(\mathbb{R})$ dan a,b,c,d,f,g $\in \mathbb{R}$. Operasi aritmatika dari dua *bilangan triangular fuzzy* tersebut didefinisikan sebagai berikut :

(i) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, b, c) \oplus (e, f, g) = (a + e, b + f, c + g)$

(ii) $-\tilde{A} = (-c, -b, -a)$

(iii) $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a, b, c) \ominus (e, f, g) = (a - g, b - f, c - e)$

(iv) a. $k \otimes \tilde{A} = k \otimes (a, b, c) = (ka, kb, kc)$ untuk $k > 0$

b. $k \otimes \tilde{A} = k \otimes (a, b, c) = (-kc, -kb, -ka)$ untuk $k < 0$

(v) Misalkan $\tilde{A} = (a, b, c)$ merupakan bilangan *triangular fuzzy* dan $\tilde{B} = (p, q, r)$ adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif maka:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \begin{cases} (ap, bq, cr), & a \geq 0 \\ (ar, bq, cr), & a < 0, c \geq 0 \\ (ap, bq, ca), & c < 0. \end{cases}$$

Definisi 2.14. [1] Fungsi peringkat adalah fungsi $\Re : F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dimana $F(\mathbb{R})$ adalah himpunan bilangan *fuzzy* yang didefinisikan pada himpunan bilangan real, yang memetakan setiap bilangan *fuzzy* pada bilangan real.

Misalkan $\tilde{A} = (a, b, c)$, adalah bilangan *triangular fuzzy*, maka:

$$\Re(\tilde{A}) = \frac{a + 2b + c}{4}$$

2.2. Program Linier *Fuzzy* Tidak Penuh

Program linier *fuzzy* disebut program linier *fuzzy* tidak penuh dikarenakan terdapat variabel keputusan, pembatas tanda, koefisien fungsi tujuan, koefisien kendala, atau ruas kanan kendala yang merupakan bilangan *crisp.* Salah satu bentuk program linier *fuzzy* tidak penuh yaitu program linier dengan variabel *fuzzy* (FVLP). Secara umum bentuk kasus maksimasi program linier dengan variabel *fuzzy* (FVLP) dirumuskan sebagai berikut [6]:

Memaksimalkan $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j$ (3.19)

terhadap $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j \leq \tilde{b}_i, (i = 1,2, \dots, m)$ (3.20)

$\tilde{x}_j \geq \tilde{0}, (j = 1,2, \dots, n)$ (3.21)

dengan a_{ij} adalah koefisien kendala *crisp*, $\tilde{b}_i$ adalah konstanta ruas kanan *fuzzy,* c_j adalah koefisien fungsi tujuan *crisp,* dan $\tilde{x}_j$ adalah variabel keputusan *fuzzy.*

2.3. Metode Mehar

Langkah-langkah metode mehar untuk menyelesaikan kasus maksimasi program linier dengan variabel *triangular fuzzy* (FVLP) dirumuskan sebagai berikut[2]:

1. Langkah 1

   Substitusikan nilai dari $\tilde{x}_j = (e_j, f_j, g_j)$ dan $\tilde{b}_i = (p_i, q_i, r_i)$ ke dalam (3.19) – (3.21) sehingga diperoleh:

   Memaksimalkan $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \otimes (e_j, f_j, g_j)$ (3.22)

   terhadap $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (e_j, f_j, g_j) \leq, =, \geq (p_i, q_i, r_i), \; i = 1,2, \dots, m$ (3.23)

   $g_j - f_j \geq 0$ (3.24)

   $f_j - e_j \geq 0$ (3.25)

   $e_j \geq 0, \forall j = 1,2, \dots, n$ (3.26)

2. Langkah 2

   Formulasikan masalah program linier dengan variabel *triangular fuzzy* FVLP (3.22) – (3.23) ke dalam program linier *crisp* (CLP).

   Memaksimalkan $\Re(\tilde{z}) = \Re\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes (e_j, f_j, g_j)\right)$ (3.27)

Terhadap $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(e_j, f_j, g_j\right)\right) \leq, =, \geq \Re(p_i, q_i, r_i),\ i = 1,2, \dots, m$ (3.28)

$$g_j - f_j \geq 0 \quad (3.29)$$

$$f_j - e_j \geq 0 \quad (3.30)$$

$$e_j, f_j, g_j \geq 0, \forall j = 1,2, \dots, n \quad (3.31)$$

3. Langkah 3

   Menyelesaikan masalah CLP (3.27) – (3.28) untuk menemukan solusi optimal e_j, f_j, g_j dengan menggunakan metode simpleks. Dalam metode simpleks diperoleh iterasi akhir tabel simpleks optimal [4].

4. Langkah 4

   Memasukkan nilai e_j, f_j, g_j ke dalam $\tilde{x}_j = \left(e_j, f_j, g_j\right)$ untuk menemukan solusi optimal *fuzzy*.

5. Langkah 5

   Temukan solusi nilai optimal *fuzzy* dari masalah program linier dengan variabel *triangular fuzzy* (FVLP) dengan memasukkan nilai dari $\tilde{x}_j$ kedalam $\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j$.

6. Langkah 6

   Penegasan nilai optimal *fuzzy* dengan fungsi peringkat

2.4. Analisa Sensitivitas

Bentuk umum (3.19) juga dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:

Memaksimalkan : $\tilde{z} = c\tilde{x}$ (3.32)

dengan kendala : $A\tilde{x} \leq (\geq, =)\ \tilde{b}$ (3.33)

$$\tilde{x} \geq \tilde{0} \quad (3.34)$$

Metode Mehar digunakan untuk pengoptimalan apabila terjadi perubahan pada parameter $(A, c, \tilde{b})$. Macam-macam perubahan pada parameter-parameter dalam FVLP antara lain:

1. Perubahan Pada Koefisien Fungsi Tujuan

Jika nilai c_j berubah menjadi c'_j pada masalah FVLP (3.32) maka ganti $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes (e_j, f_j, g_j)\right)$ dengan $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} c'_j \otimes (e_j, f_j, g_j)\right)$ pada masalah CLP (3.27) [2].

2. Perubahan Pada Ruas Kanan Kendala

Jika nilai $\tilde{b} = (p_i, q_i, r_i)$ berubah menjadi $\tilde{b}' = (p'_i, q'_i, r'_i)$ pada masalah FVLP (3.33) maka ganti $\Re(p_i, q_i, r_i)$ dengan $\Re(p'_i, q'_i, r'_i)$ pada masalah CLP (3.28) [2].

3. Penambahan Kendala Baru

Misalkan kendala variabel *fuzzy* baru ditambahkan pada masalah FVLP (3.32) – (3.34) maka ganti $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (e_j, f_j, g_j)\right) \leq, =, \geq \Re(p_i, q_i, r_i)$ dengan $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} (e_j, f_j, g_j)\right) \leq, =, \geq \Re(p'_i, q'_i, r'_i)$ padamasalah CLP (3.38) [2].

4. Perubahan Kolom Variabel Non Basis

Jika nilai pada kolom A berubah menjadi A' pada masalah FVLP (3.33) maka ganti $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (e_j, f_j, g_j)\right) \leq, =, \geq \Re(p_i, q_i, r_i)$ dengan $\Re\left(\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} (e_j, f_j, g_j)\right) \leq, =, \geq \Re(p_i, q_i, r_i)$ pada masalah CLP (3.28) [2].

2.5. Studi Kasus

Model program linier dengan variabel *fuzzy* diterapkan pada studi kasus *home industry* "Rizki Batako". Metode mehar digunakan untuk pengoptimalan keuntungan dari hasil produksi "Rizki Batako" dan melakukan analisa sensitivitas terhadap solusi optimal. Studi kasus dilakukan dengan wawancara dan diperoleh hasil sebagai berikut:

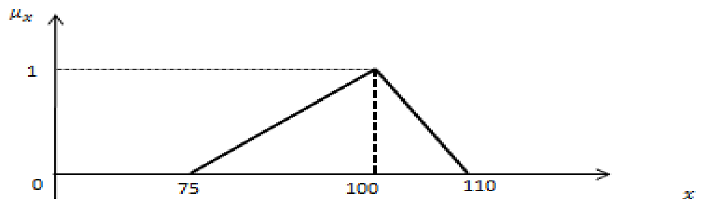
Home industry bahan bangunan bernama “Rizki Batako” di daerah Pudak Payung, Semarang, memproduksi beberapa jenis bahan bangunan diantaranya batako, paving segi empat, dan paving segi enam. Untuk memproduksi ketiga produk tersebut dibutuhkan 2 jenis bahan baku utama berupa pasir dan semen. Setiap satu buah batako membutuhkan 8 kg pasir dan 5 ons semen. Setiap buah paving segi empat membutuhkan 3 kg pasir dan 2 ons semen. Setiap satu buah paving segi enam membutuhkan $\frac{24}{5}$ kg pasir dan 3 ons semen. Karena keterbatasan gudang untuk menyimpan bahan baku dan dana produksi yang ada maka bahan baku yang disediakan tiap sepuluh hari adalah sebanyak 12800 kg pasir dan 20 sak semen atau 1000 kg semen. Namun, ketika musim libur sekolah bahan bangunan yang semula untuk lima hari bisa habis digunakan untuk produksi satu hari karena banyaknya permintaan.

Dalam pembelian bahan baku, menggunakan jasa truk untuk mengangkut pasir dan semen. Namun, truk yang digunakan tidak selalu sama kapasitas angkutnya sehingga memungkinkan adanya pengurangan atau penambahan dalam satu kali pembelian bahan baku. Pengurangan bahan baku untuk pasir tidak pernah mencapai 9600 kg pasir dalam satu kali pembelian sedangkan pengurangan untuk semen tidak pernah mencapai 750 kg dalam satu kali pembelian. Penambahan bahan baku pasir tidak pernah mencapai 16.000 kg dalam satu kali pembelian sedangkan bahan baku semen tidak pernah mencapai 1100 kg. Diketahui keuntungan yang dihasilkan dari produksi ketiga jenis produk tersebut masing-masing adalah sebesar Rp 3.425,00/satu buah batako, Rp 2.800,00/m paving segi empat, dan Rp 6.350,00/m paving segi enam. Untuk setiap satu meter persegi paving segi empat terdiri dari 50 buah dan setiap satu meter persegi paving segi enam terdiri dari 28 buah.

Berdasarkan kondisi tersebut, berapakah keuntungan maksimum yang bisa diperoleh oleh *Home industry* bahan bangunan “Rizki Batako”. Kemudian perubahan kondisi menjelang libur sekolah apakah mempengaruhi keuntungan maksimum yang didapat oleh *Home industry* bahan bangunan “Rizki Batako”?

Jumlah bahan baku untuk ketiga produk tersebut dapat dibentuk ke dalam bilangan *triangular fuzzy* sebagai berikut:

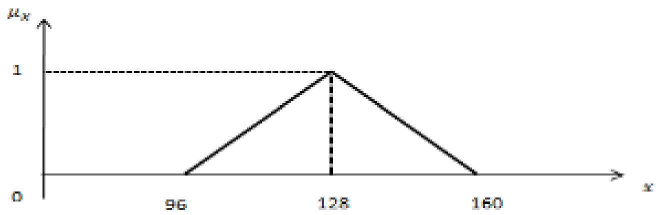
Semen:



Gambar 3.1 Bilangan *Triangular Fuzzy* untuk Semen

Jumlah bahan baku semen yang dibutuhkan dalam bilangan *triangular fuzzy* yaitu (7500,10000,11000) atau dapat ditulis menjadi (75,100,110) dalam ratusan ons.

Pasir:



Gambar 3.2 Bilangan *Triangular Fuzzy* untuk Pasir

Jumlah bahan baku pasir yang dibutuhkan dalam bilangan *triangular fuzzy* yaitu (9600,12800,16000) atau dapat ditulis menjadi (96,128,160) dalam ratusan kg.

Variabel keputusan:

x_1 = jumlah batako yang harus diproduksi

x_2 = jumlah paving segi empat yang harus diproduksi

x_3 = jumlah paving segi enam yang harus diproduksi

Kasus tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

Memaksimalkan: $\tilde{z} = 3425\tilde{x}_1 + 2800\tilde{x}_2 + 6350\tilde{x}_3$

dengan kendala $5\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 \geq (75,100,110)$

$$8\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 + \frac{24}{5}\tilde{x}_3 \geq (96,128,160)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq \tilde{0}$$

Kasus di atas merupakan bentuk dari kasus memaksimalkan FVLP.

- Solusi dari kasus maksimasi FVLP dicari menggunakan metode mehar Diperoleh nilai fungsi tujuan *fuzzy* dan *crisp* optimal yaitu $\tilde{z} = \left(0, \frac{2032000}{9}, \frac{2032000}{9}\right)$ dan $z = \frac{508000}{3} \approx 169333.33$. Dengan nilai solusi penyelesaian fuzzy optimalnya adalah $\tilde{x}_1 = (0, 0,0)$, $\tilde{x}_2 = (0, 0,0)$, $\tilde{x}_3 = \left(0, \frac{320}{9}, \frac{320}{9}\right) \approx (0, 35.5556, 35.5556)$.
- Jadi, keuntungan maksimum yang bisa didapat oleh *home industry* makanan “Laba-laba” dalam memproduksi jenang dan mino adalah sebesar Rp 169.333.333,00 dengan jumlah paving segi enam yang harus diproduksi sebanyak 35 m^2 atau 1750 buah paving.
- Ketika terjadi perubahan pada ruas kanannya atau kapasitas sumber daya, dengan metode mehar maka diperoleh kondisi yang ada masih optimal dengan keuntungan sebesar Rp 1.001.447.917,00 dan jumlah paving segi enam yang harus diproduksi sebanyak 2102 m^2 atau 58878 buah paving.
- Misalkan pemilik home industry ingin melakukan perubahan terhadap nilai keuntungan dari paving segi enam, maka dengan metode mehar perubahan diijinkan sejauh $c_3 = 6350 + \theta$ dengan $\theta \geq -1870$, maka kondisi masih tetap akan optimal

III. KESIMPULAN

Metode Mehar dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier dengan variabel *fuzzy* bilangan *triangular*. Permasalahan program linier *fuzzy* dengan variabel *fuzzy* tidak hanya dapat dicari solusi optimalnya tapi juga dapat dicari sejauh mana perubahan (θ) diijinkan terhadap model yang sudah ada sehingga solusi yang diperoleh setelah perubahan tetap dalam keadaan optimal. Analisa sensitivitas dilakukan pada program linier dengan variabel *fuzzy* dengan melakukan penegasan berdasarkan metode mehar terlebih dahulu terhadap model yang telah mengalami perubahan. Nilai θ diperoleh dengan bantuan tabel simpleks optimal dari permasalahan awal serta menggunakan teknik analisa sensitivivtas metode simpleks sehingga diperoleh selang perubahan (θ) yang diijinkan dengan demikian solusi baru akan tetap optimal.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Amit Kumar, Jagdeep Kaur dan Pushpinder Singh. 2010. Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Problems with Inequality Constraints. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences,* Vol. 6*,* No.1, pp.37 – 41.

[2] Amit, K, Neha, B. 2011. A New Method for Solving Fuzzy Sensitivity Analysis Problems. *International Journal of Applied Science and Engineering,* Vol. 9*,* No.2, pp.49 – 64.

[3] Hillier, F.S, Lieberman, G.J. 2001. *Introduction to Operation Research*. New York : McGraw-Hill.

[5] Nezam Mahdavi-Amiri, Seyed Hadi Nasseri, Alahbakhsh Yazdani. 2009. “Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems”, *Iranian Journal of Operation Research.* Vol.1, No.2, pp.68-84.

[8] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu.