

**DINAMIKA MODEL EPIDEMIK SVIRS TERHADAP
PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN
STRATEGI VAKSNINASI KONTINU**

ARTIKEL ILMIAH

Oleh:

**SALMAH
NIM. 11130004**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS PASIR PENGARAIAN
PASIR PENGARAIAN
2015**

LEMBAR PENGESAHAN ARTIKEL ILMIAH

**DINAMIKA MODEL EPIDEMIK SVIRS TERHADAP
PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN
STRATEGI VAKSINASI KONTINU**

**Karya ilmiah ini dibuat sebagai salah satu syarat kelulusan
studi sarjana (S-1) di Universitas Pasir Pengaraian**

Ditetapkan dan disahkan di Pasir Pengaraian
Pada Tanggal 8 Februari Tahun 2015

Oleh:

Tonaas Kabul Wangkok Yohanis Marentek, M.Si
Pembimbing I

Lusi Eka Afri, M.Si
Pembimbing II

Mengetahui,

Lusi Eka Afri, M.Si
Ketua Program Studi

DINAMIKA MODEL EPIDEMIK SVIRS TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN STRATEGI VAKSINASI KONTINU

Salmah^{*}, Tonaas K.W.Y. Marentek¹⁾, Lusi Eka Afri²⁾

^{1&2)} Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pasir Pengaraian

ABSTRAK

Penelitian mengenai dinamika model epidemik SVIRS dengan strategi vaksinasi kontinu pada penyebaran influenza menggunakan pendekatan matematis. Hasil penelitian diperoleh titik tetap bebas penyakit (T_0) dan titik tetap endemik (T_*) dengan kondisi kestabilan sepenuhnya bergantung pada Bilangan Reproduksi Dasar (R_d). Jika $R_d < 1$ maka T_0 akan stabil asimtotik, sebaliknya jika $R_d > 1$ maka T_* akan stabil asimtotik. Jika $R_d = 1$, maka diperoleh tingkat vaksinasi kontinu minimum model (α_c). Strategi $\alpha \geq \alpha_c$ menyebabkan $R_d \leq 1$ sehingga T_0 stabil asimtotik, strategi $\alpha < \alpha_c$ dilakukan menyebabkan $R_d > 1$ sehingga T_* stabil. Simulasi yang dilakukan dengan perangkat Mathematica 7.

Kata kunci : Influenza, Model Epidemik SVIRS, Strategi Vaksinasi Kontinu.

ABSTRACT

The research about dinamica model epidemic SVIRS by continuous vaccination strategy in sread of influenza used mathematical models. The result gots free of disease equilibrium (T_0), and endemic equilibrium (T_*). Stability condition them principle by number of found reproduction model (R_d). If $R_d < 1$ then (T_0) be asimtotik stabil, which means that diseases will be missing from the population. In contrast if $R_d > 1$ then (T_*) be asimtotik stabil. If $R_d = 1$ then got level of minimum vaccination model (α_c). Strategy $\alpha \geq \alpha_c$ get $R_d \leq 1$ so that (T_0) be asimtotik stabil, Strategi $\alpha < \alpha_c$ get $R_d > 1$ so that (T_*) be asimtotik stabil. Simulation did by the program mathematica 7.

Keywords : Influenza, model epidemic SVIRS, Continuous vaccination strategy.

PENDAHULUAN

Fenomena alam penyebaran penyakit dapat dianalisis menggunakan model matematika epidemik. Model matematika epidemik pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 dalam bentuk model kompartemen, yaitu model dasar SIR dan SIS. Dimana setiap huruf mengacu pada kompartemen individu berada. Dimana setiap huruf mengacu pada kompartemen individu berada. Kompartemen S (*Susceptible*) yaitu kelompok individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, kompartemen I (*Infected*) yaitu kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit dan kompartemen R (*Recovered*) yaitu kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit. Individu yang rentan dapat tertular penyakit karena adanya kontak antar individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi. Vaksinasi dalam pemodelan penyebaran penyakit berarti adanya penambahan secara alami kompartemen V (*Vaccinated*) ke dalam model epidemik SIRS penyakit tersebut sehingga menjadi SVIRS. Kompartemen V merupakan kelompok individu rentan yang mengalami proses vaksinasi.

Pada tahun 2004 Alexander, *et all* mengkaji model SVIRS menambahkan kompartemen V ke dalam model SIRS sehingga menjadi model SIRVS dengan asumsi bahwa individu yang divaksinasi selain masih bisa terinfeksi mereka tidak akan mendapatkan kekebalan permanen tetapi akan langsung kembali ke populasi individu yang rentan.

Sehingga berdasarkan Alexander, *et all*(2004) dan Marentek (2011), maka model epidemik SVIRS dengan strategi vaksinasi kontinu ini mengasumsikan bahwa kekebalan yang diperoleh dari proses vaksinasi hanya bersifat sementara sehingga individu tersebut memungkinkan menjadi rentan kembali. Adapun dari

asumsi-asumsi diatas dapat digambarkan diagram transfer model epidemik SVIRS dengan strategi vaksinasi kontinu berikut.

Pada penelitian ini akan dikaji model penyebaran penyakit influenza menggunakan model epidemik SVIRS dengan strategi vaksinasi kontinu. Analisis dinamika penularan influenza menjadi pembahasannya. Selain itu, juga akan dianalisa pengaruh vaksinasi dan simulasinya.

METODOLOGI

Dalam penelitian ini akan dilakukan dengan pendekatan matematis dan studi literatur. Adapun kerangka analisis penelitian ini pertama, menentukan titik tetap. Kedua, menganalisa kestabilan setiap titik tetap dengan menentukan nilai eigen masing-masing titik tetap melalui matriks *Jacobinya* ataupun dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dan menentukan Bilangan Reproduksi Dasar model. Ketiga, menganalisis pengaruh vaksinasi kontinu berdasarkan bilangan reproduksi dasarnya secara matematis. Terakhir, melakukan simulasi terhadap penyakit Influenza dengan menggunakan perangkat lunak *Mathematica 7.0*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem persamaan diferensial pada penelitian ini dinamakan sistem 3 berikut:

*Hp : 085278804126

e-mail : salmah_mz@yahoo.com

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S + \theta R + \omega V \\ \frac{dV}{dt} = \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V - \omega V \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 V + \gamma I - \theta R - \mu R \end{cases}$$

Sistem 3 diatas akan sulit dianalisis sehingga diperlukan dan ditentukan daerah solusi yang fesibel. Misalkan ukuran total populasi dari Sistem 3 adalah $N = S + V + I + R$. Maka laju pertumbuhan populasi terhadap waktu adalah:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \mu - \mu N$$

diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1.$$

Berarti bahwa kapasitas batas dari jumlah populasi untuk waktu yang lama akan menuju satu.

Dengan demikian, solusi daerah fesibel model Sistem 3 dapat dibatasi dalam Ω , invarian positif berikut.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (S, V, I, R): S, V, I, R \geq 0; \\ N = S + V + I + R = 1 \end{array} \right\}$$

Karena dinamika model Sistem 3 terbatas pada Ω sehingga sistem 3 diatas dapat direduksi menjadi Sistem 4 berikut, yaitu dengan mensubstitusikan $N = 1 = S + V + I + R$.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S + \theta(1 - S - V - I) + \omega V \\ \frac{dV}{dt} = \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V - \omega V \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I \end{cases}$$

Dengan menggunakan definisi dari titik tetap maka Sistem 4 diperoleh :

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$$

Pada persamaan yang terakhir diperoleh :

$$I = 0 \text{ atau } \beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu = 0$$

Terlihat bahwa terdapat dua kasus yaitu kasus pertama untuk $I = 0$ maka $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu \neq 0$, dan kasus lainnya untuk $I \neq 0$ maka $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu = 0$

Pada kasus kasus pertama, untuk $I = 0$ maka $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu \neq 0$, tidak ada individu yang terinfeksi dalam populasi atau populasi terbebas dari penyakit. Sehingga diperoleh titik tetap bebas penyakit $T_0 = (S_0, V_0, I_0)$, dimana :

$$S_0 = \frac{(\mu + \theta)(\gamma_1 + \mu + \omega)}{(\mu + \theta)(\gamma_1 + \mu + \omega) + \alpha(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

$$V_0 = \frac{\alpha(\mu + \theta)}{(\mu + \theta)(\gamma_1 + \mu + \omega) + \alpha(\mu + \gamma_1 + \theta)}$$

dan $I_0 = 0$

Pada kasus lain, $I \neq 0$ maka $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu = 0$. $I \neq 0$ nilainya $I > 0$ atau $I = I_* > 0$ yang berarti bahwa terdapat indivu yang terinfeksi penyakit sehingga menyebabkan endemik dan akan epidemik . Titik tetap ini dinamakan dengan titik tetap endemik $T_* = (S_*, V_*, I_*)$, dimana :

$$S_* = \frac{(\gamma + \mu)(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \omega)}{\beta(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \omega) + \alpha\beta_1}$$

$$V_* = \frac{\alpha(\gamma + \mu)(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \omega)}{(\mu + \gamma_1 + \theta)\{\beta(\beta_1 I + \gamma_1 + \mu + \omega) + \alpha\beta_1\}}$$

dan I_* adalah akar-akar positif dari $g(I) \equiv A_1 I^2 + A_2 I + A_3$ dengan :

$$A_1 = \beta\beta_1(\gamma + \mu + \theta)$$

$$A_2 = \left(\frac{\beta_1(\gamma + \mu)}{(\mu + \theta)} \right) + (\gamma + \mu) \left(\frac{\alpha\beta_1}{\beta(\gamma + \mu) + \beta\omega} \right) + \left(\frac{\alpha\beta_1\theta}{\beta\beta_1(\mu + \theta)} \right)$$

$$A_3 = (\gamma + \mu) \left(\frac{(\mu + \theta)}{(\mu + \gamma_1 + \omega)} \right) - (\mu + \theta) \left(\frac{\beta(\mu + \gamma_1 + \omega)}{\alpha\beta_1} \right)$$

Analisis Kestabilan Titik Tetap

Kestabilan akan dianalisis pada kedua titik tetap yang diperoleh. Analisis kedua titik tetap akan digunakan matriks jocobi atau kriteria *Routh-Hurwitz*.

Pada titik tetap bebas penyakit, analisis kestabilan menggunakan matriks jocobi yang seterusnya akan dicari nilai eigennya.

$$J(T_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha + \theta) & -\theta + \omega & -(\beta S_0 + \theta) \\ \alpha & -(\gamma_1 + \mu + \omega) & -\beta_1 V_0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \beta_1 V_0 - (\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai eigen $J(T_0)$ dari $(-\beta S_0 + \beta_1 V_0 - (\gamma + \mu) - \lambda$ dan nilai eigen dari J_1 . Dimana

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha + \theta) & -\theta + \omega \\ \alpha & -(\gamma_1 + \mu + \omega) \end{bmatrix}.$$

Menurut kriteria *Routh-Hurwitz* jika nilai determinan dari sebuah matriks H_j positif maka nilai eigen matriks H_j pastilah negatif. Karena nilai determinan matriks J_1 positif sehingga nilai eigen matriks J_1 tentunya akan negatif. Dengan demikian kestabilan T_0 tergantung pada nilai eigen pada $(-\beta S_0 + \beta_1 V_0 - (\gamma + \mu) - \lambda$

atau

$$\lambda_1 = (\gamma + \mu)(R_d - 1)$$

dengan

$$R_d = \frac{(\mu + \theta)(\beta(\mu + \gamma_1 + \omega) + \alpha\beta_1)}{(\gamma + \mu)((\mu + \theta)(\mu + \gamma_1 + \omega) + \alpha(\mu + \gamma_1 + \theta))}$$

T_0 akan stabil jika $\lambda_1 < 0 \Leftrightarrow (\gamma + \mu)(R_d - 1) < 0$ dan tidak stabil jika $\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow (\gamma + \mu)(R_d - 1) > 0$.

Pada titik tetap endemik, analisis kestabilan menggunakan matriks jocobi dan kriteria *Routh-Hurwitz* serta berdasarkan bilangan reproduksi dasar (R_d) . Matriks Jacobi adalah sebagai berikut :

$$J(T_*) = \begin{bmatrix} -(\beta I_* + \alpha + \theta + \mu) & -(\theta - \omega) & -(\beta S_* + \theta) \\ \alpha & -(\beta_1 + \gamma_1 + \mu + \omega) & -\beta_1 V_* \\ \beta I_* & \beta_1 I_* & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan karakteristik pada $J(T_*)$ diperoleh nilai eigen dari persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$, dengan :

$$a_1 = \left(\frac{\beta I_* + \alpha}{\theta + \mu} \right) + (\beta_1 + \gamma_1 + \mu + \omega) > 0$$

$$a_2 = \alpha \left(\frac{\beta_1 + \gamma_1}{\theta + \mu} \right) + \left(\frac{\beta_1 + \gamma_1}{\beta I_* + \theta + \mu} \right) + \left(\beta I_* \left(\frac{\beta S_*}{\theta} \right) + \beta_1^2 V_* I_* \right) > 0$$

$$a_3 = \left(\frac{\beta S_* + \theta}{\beta I_* (\beta_1 + \gamma_1 + \mu + \omega)} \right) + \left(\frac{\beta_1^2 V_* I_*}{\beta I_* + \theta + \mu} \right) - \left(\frac{\beta \beta_1 V_* I_*}{\theta - \omega} \right)$$

Untuk menentukan nilai eigen dari T_* sulit dilakukan dengan matriks Jacobi, sehingga untuk memeriksa kestabilannya digunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* kondisi kestabilan Sistem 4 pada T_* akan stabil jika memenuhi :

$a_1 > 0, a_2 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$ Terlihat koefisien-koefisien pada persamaan karakteristik bernilai positif. Oleh karena itu, untuk memeriksa kestabilan titik tetap endemik cukup dibuktikan bahwa $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* dapat disimpulkan bahwa T_* stabil jika ada.

Berikut ini akan ditunjukkan keberadaan T_* yang bergantung pada R_d . Pada titik tetap endemik diperoleh nilai I_* adalah akar positif dari persamaan $g(I) \equiv A_1 I^2 + A_2 I + A_3$ dengan :

$$A_3 = \left(\frac{((\gamma + \mu)(\theta + \mu))}{(\gamma_1 + \mu + \omega)} \right) [1 - R_d]$$

dengan

$$R_d = \frac{(\theta + \mu) \left(\frac{\beta(\gamma_1 + \mu + \omega)}{\alpha\beta_1} \right)}{(\gamma + \mu) \left(\frac{(\theta + \mu)}{(\gamma_1 + \mu + \omega)} \right) + \alpha(\gamma_1 + \theta + \mu)}$$

Karena $A_1 > 0, A_2 > 0$ dan untuk mendapatkan nilai I_* dengan akar positif maka haruslah $A_3 < 0$ sehingga terdapat akar positif yang unik dari $g(I)$. Jika $A_3 < 0$ maka R_d haruslah lebih dari satu, $R_d > 1$. Dengan demikian, titik tetap endemik akan stabil jika dan hanya jika $R_d > 1$.

Analisis kestabilan kedua titik tetap dapat ditulis dalam tabel 1.

Tabel 1. Kondisi Kestabilan

Kondisi	T_0	T_*
$R_d \leq 1$	Stabil	Tidak ada
$R_d > 1$	Tidak Stabil	Stabil

Pengaruh Vaksinasi

Sebelumnya telah didapatkan bilangan reproduksi dasar model yaitu:

$$R_d = \frac{(\theta + \mu) \left(\frac{\beta(\gamma_1 + \mu + \omega)}{\alpha\beta_1} \right)}{(\gamma + \mu) \left(\frac{(\theta + \mu)}{(\gamma_1 + \mu + \omega)} \right) + \alpha(\gamma_1 + \theta + \mu)}$$

Dari analisis kestabilan bahwa bilangan reproduksi dasar model adalah penentu kestabilan dari dinamika Sistem 4.

Untuk melihat pengaruh dari proses vaksinasi yang dilakukan secara kontinu diasumsikan :

- $\alpha = 0$ maka R_d tereduksi menjadi R_0

$$R_d = R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \mu)}$$

Jika $R_0 > 1$ maka kondisi endemik sedangkan jika $R_0 < 1$ maka kondisi bebas penyakit. Ketika tidak ada proses vaksinasi yang dilakukan diasumsikan $R_0 > 1$ sehingga $R_d > R_0 > 1$ maka kondisi endemik.

- $\alpha > 0$ atau proses vaksinasi dengan strategi vaksinasi kontinu dilakukan. Jika $\alpha > 0$ maka digunakan R_d . Ketika $R_d = 1$, maka diperoleh:

$$\alpha_c = \frac{(\theta + \mu) \left\{ \left(\frac{(\gamma_1 + \mu + \omega)}{(\gamma + \mu)} \right) - \beta(\gamma_1 + \mu + \omega) \right\}}{\beta_1(\theta + \mu) - (\gamma + \mu)(\gamma_1 + \theta + \mu)}$$

α_c merupakan tingkat vaksinasi minimum model atau minimal proporsi individu rentan yang harus divaksinasi secara terus-menerus.

- Ketika dilakukan proses vaksinasi dengan strategi vaksinasi kontinu akan terdapat 3 kasus, yaitu :

- $\alpha < \alpha_c$
Ketika kasus ini dilakukan akan menyebabkan $R_d > 1$, sehingga menurut analisis titik tetap bahwa titik tetap endemik akan stabil. Artinya pada kondisi ini penyakit akan menetap dan menjadi endemik pada populasi.

- $\alpha = \alpha_c$
Jika kasus ini dilakukan akan menyebabkan $R_d = 1$. Jika $R_d = 1$ disubstitusi ke persamaan $g(I)$ akan diperoleh nilai $A_3 = 0$ dan $g(I)$ tereduksi menjadi $g(I) \equiv A_1 I^2 + A_2 = I(A_1 I + A_2) = 0$. Karena $A_1 > 0, A_2 > 0$ maka $g(I)$ tidak memiliki akar yang bernilai positif sehingga tidak terdapat titik tetap endemik. Keberadaan titik tetap bebas penyakit ketika $R_d = 1$ menyebabkan $\lambda_1 = 0$ sehingga semua nilai eigen bagian realnya bernilai negatif sehingga titik tetap bebas penyakit akan stabil. Jadi, kasus $\alpha = \alpha_c$ hanya mempunyai satu titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit yang stabil, artinya penyakit influenza akan hilang dari populasi.

- $\alpha > \alpha_c$
Pada kasus ini proporsi individu rentan yang divaksinasi secara kontinu berada diatas atau lebih dari proporsi tingkat vaksinasi minimum model. Jika kasus ini dilakukan akan menyebabkan $R_d < 1$. Menurut analisis kestabilan titik tetap penyakit jika $R_d < 1$ maka titik tetap bebas penyakit akan stabil. Jadi, pada kasus ini menyebabkan kondisi bebas penyakit akan stabil yang artinya populasi akan bebas penyakit.

Simulasi Model

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan bantuan perangkat lunak *Mathematica 7.0*. Pada bagian ini dilakukan simulasi untuk melihat dinamika sistem model serta melihat pengaruh dari proses vaksinasi yang dilakukan.

Simulasi di Titik Tetap Bebas Penyakit

Diberikan nilai parameter-parameter model yang akan dilakukan simulasi pada tabel berikut.

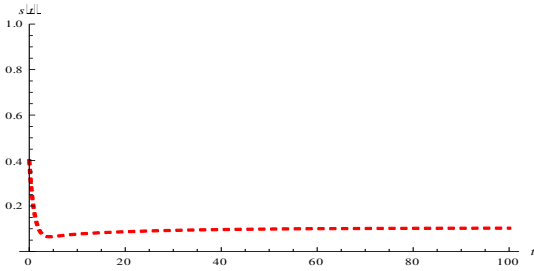
Tabel 2. Nilai Parameter Model

Parameter	μ	β	β_1	γ	γ_1	θ	ω	S(0)	v(0)	I(0)
Nilai	0,0000365	0,5	0,05	0,1	0,4	0,12	0,0002	0,4	0	0,3

Dengan nilai parameter pada Tabel 2. dan nilai parameter $\alpha = 0,8$ maka diperoleh titik tetap bebas penyakit berikut :

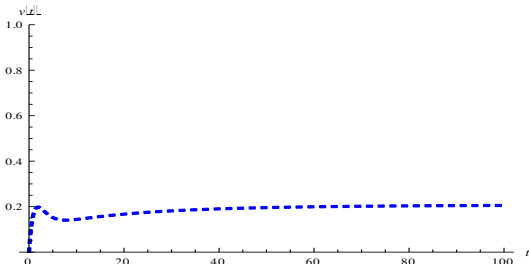
$$T_0 = (0,1035, 0,2069, 0) \text{ dan } R_d = 0,6209 < 1.$$

Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4.



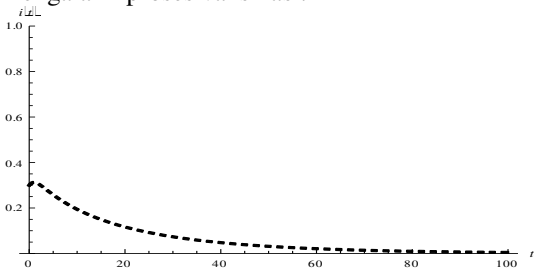
Gambar 1. Dinamika Populasi S Terhadap t dengan $R_d = 0,6209$

Gambar 1. menunjukkan bahwa proporsi manusia yang rentan mengalami penurunan menuju ke titik tetap stabilnya 0.1035. Hal ini disebabkan adanya manusia yang rentan mengalami proses vaksinasi dan ada manusia yang terinfeksi penyakit influenza.



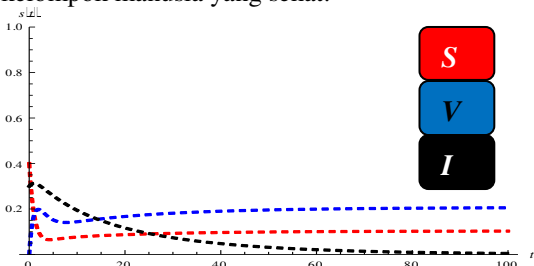
Gambar 2. Dinamika Populasi V Terhadap t dengan $R_d = 0,6209$

Terlihat Gambar 2. menunjukkan bahwa proporsi kelompok manusia yang divaksin mengalami kenaikan dan penurunan hingga menuju kestabilannya pada titik tetap 0.2069. Penurunan dikarenakan kelompok yang divaksinasi ada yang terserang penyakit influenza dan ada yang memperoleh efek vaksinasi sehingga menjadi manusia yang sehat dan mendapatkan kekebalan sementara serta ada manusia yang divaksin hanya memperoleh kekebalan parsial sehingga menjadi kelompok yang rentan kembali. Sedangkan kenaikan disebabkan adanya manusia yang mengalami proses vaksinasi.



Gambar 3. Dinamika Populasi I Terhadap t dengan $R_d = 0,6209$

Gambar 3. proporsi kelompok manusia yang terinfeksi menuju titik kestabilan nol sampai t ke-100 yang artinya penyakit influenza akan hilang dalam populasi hingga pada waktu ke 100 hari. Sehingga manusia tersebut menjadi kelompok manusia yang sehat.



Gambar 4. Dinamika Populasi S , V , dan I Terhadap t dengan $R_d = 0,6209$

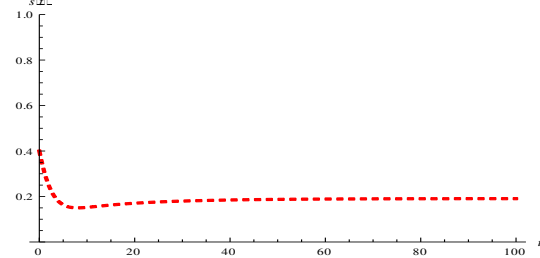
Gambar 4. merupakan gabungan dari Gambar 1. sampai Gambar 3. yang menjelaskan bahwa jika laju manusia yang divaksinasi sebesar 0,8 mengakibatkan bilangan reproduksi dasar kurang dari satu sehingga lama-kelamaan penyakit influenza akan hilang dari populasi.

Simulasi di Titik Tetap Endemik

Dengan nilai parameter pada Tabel 2. dan nilai parameter $\alpha = 0,2$ maka diperoleh titik tetap endemik berikut

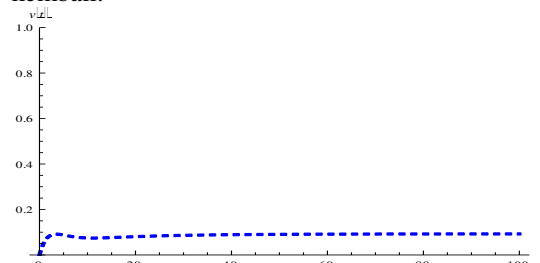
$$T_* = (0.1908, 0.0928, 0.2222) \text{ dan } R_d = 1.6582 > 1.$$

Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 5, Gambar 6, Gambar 7 dan Gambar 8.



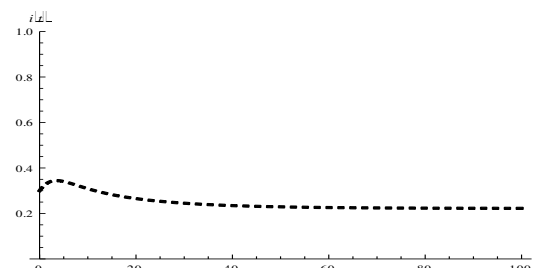
Gambar 5. Dinamika Populasi S Terhadap t dengan $R_d = 1.6582$

Terlihat Gambar 5. menunjukkan proporsi kelompok manusia yang rentan mengalami penurunan dan kenaikan hingga menuju titik tetap stabilnya 0.1908. Penurunan dikarenakan kelompok manusia yang rentan ada yang terserang penyakit influenza dan karena adanya manusia yang divaksinasi. Sedangkan kenaikan proporsi kelompok manusia yang rentan disebabkan kelompok manusia yang sehat dari penyakit influenza menjadi manusia yang rentan kembali.



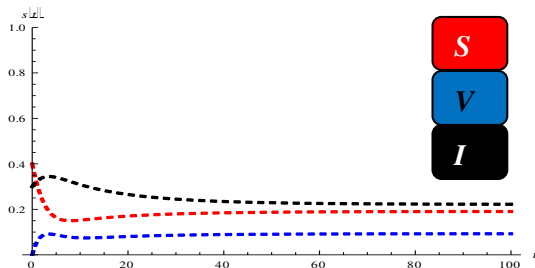
Gambar 6. Dinamika Populasi V Terhadap t dengan $R_d = 1.6582$

Pada Gambar 6. proporsi kelompok manusia yang divaksinasi cenderung mengalami kenaikan dan menuju kestabilannya pada titik tetap 0.0928. kenaikan dikarenakan kelompok yang divaksinasi banyak yang terinfeksi penyakit influenza.



Gambar 7. Dinamika Populasi I Terhadap t dengan $R_d = 1.6582$

Gambar 7. menunjukkan proporsi kelompok manusia yang terinfeksi mengalami kenaikan dan penurunan hingga menuju titik stabilnya 0.2222. Kenaikan dikarenakan adanya manusia yang terinfeksi penyakit influenza dari kelompok rentan dan karena adanya manusia yang tidak mendapatkan efek vaksinasi sehingga terinfeksi penyakit influenza. Sedangkan penurunan dikarenakan adanya manusia yang terinfeksi menjadi sehat. Proporsi kelompok manusia yang terinfeksi menurun dan akan stabil stabil pada titik 0.2222 yang artinya penyakit influenza tidak akan hilang dari populasi dan akan menjadi endemik.

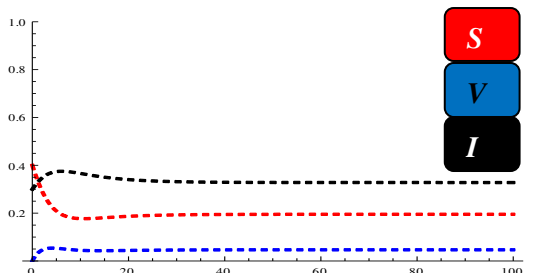


Gambar 8. Dinamika Populasi S , V , dan I Terhadap t dengan $R_d = 1.6582$

Gambar 8. menjelaskan bahwa setiap proporsi manusia dalam masing-masing kelompok akan menuju titik tetap stabilnya setelah mengalami kenaikan maupun penurunan. Jika $R_d > 1$ maka proporsi manusia yang terinfeksi akan tetap ada dalam populasi yang ditunjukkan dengan proporsi manusia yang terinfeksi stabil pada titik tetapnya 0.2222.

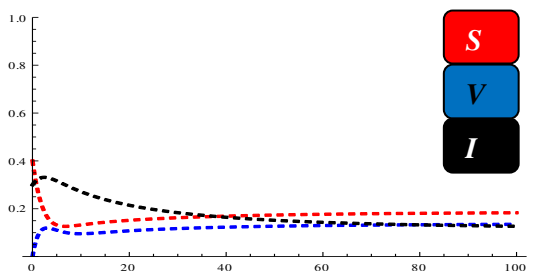
Simulasi Pengaruh Vaksinasi

Dengan nilai parameter pada Tabel 2. dan nilai parameter $\alpha = 0.1 < \alpha_c = 0.4175$, $\alpha = 0.3 < \alpha_c = 0.4175$, $\alpha = \alpha_c = 0.4175$, $\alpha = 0.6 > \alpha_c = 0.4175$, $\alpha = 0.8 > \alpha_c = 0.4175$ maka hasil simulasi pengaruh vaksinasi dapat dilihat pada gambar 4.9 :



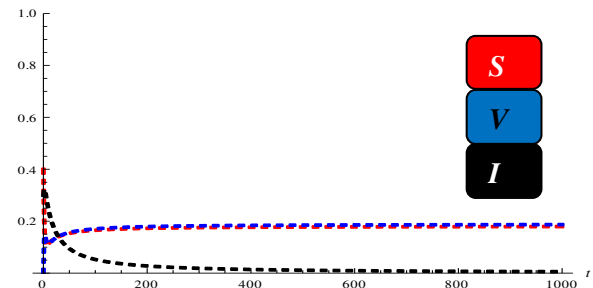
Gambar 9. Dinamika Populasi Ketika $\alpha = 0.1 < \alpha_c = 0.4175$

Terlihat Gambar 9. bahwa pada proporsi kelompok manusia yang terinfeksi influenza hanya sedikit mengalami penurunan dan tidak akan mendekati nol, yang artinya manusia yang terinfeksi akan tetap ada dalam populasi.



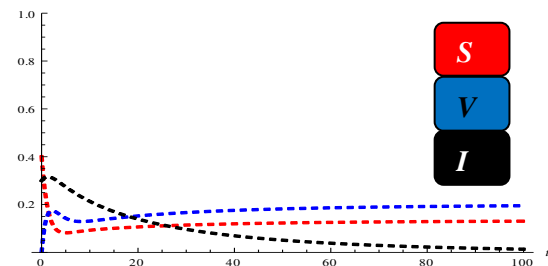
Gambar 10. Dinamika Populasi Ketika $\alpha = 0.3 < \alpha_c = 0.4175$

Pada Gambar 10. menjelaskan bahwa proporsi kelompok manusia yang terinfeksi akan menurun jika laju manusia yang divaksin ditingkatkan hingga mendekati tingkat vaksinasi minimum model. Sehingga mengakibatkan proporsi manusia yang divaksinasi dan proporsi manusia yang rentan akan mengalami kenaikan.



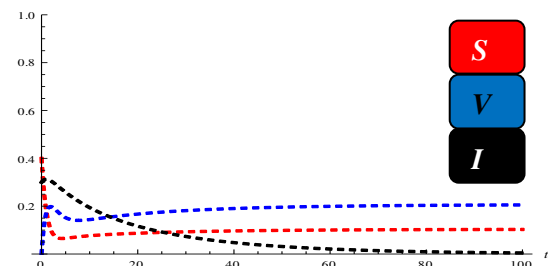
Gambar 11. Dinamika Populasi Ketika $\alpha = \alpha_c = 0.4175$ untuk $t = 1000$

Terlihat dari Gambar 11. menunjukkan proporsi kelompok manusia yang terinfeksi akan menurun dan menuju nol sampai t ke-1000 untuk mencapai titik nol, yang artinya penyakit influenza akan menghilang dari populasi dengan waktu yang lama jika jumlah manusia yang divaksinasi sama dengan jumlah tingkat vaksinasi minimum. Sedangkan proporsi kelompok manusia yang rentan akan menuju stabil dan akan sama dengan proporsi kelompok manusia yang divaksinasi.



Gambar 12. Dinamika Populasi Ketika $\alpha = 0.6 > \alpha_c = 0.4175$

Dari Gambar 12. bahwa jika jumlah manusia yang divaksinasi lebih dari jumlah tingkat vaksinasi minimum maka proporsi kelompok manusia yang terinfeksi akan mendekati nol pada t ke-100. Dengan menambahkan jumlah manusia yang divaksinasi akan mempercepat proporsi kelompok manusia yang terinfeksi menuju nol.



Gambar 13. Dinamika Populasi Ketika $\alpha = 0.8 > \alpha_c = 0.4175$

Terlihat Gambar 13. bahwa proporsi kelompok manusia yang terinfeksi akan menuju nol pada t ke-80. Semakin banyak manusia yang divaksinasi dari kelompok

rentan maka semakin cepat proporsi kelompok terinfeksi menuju nol.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk menurunkan proporsi kelompok manusia yang terinfeksi hingga berada di titik nol maka jumlah manusia yang divaksinasi harus lebih atau sama dengan jumlah tingkat vaksinasi minimum. Artinya, influenza akan dapat diberantas dan menghilang dari populasi jika dilakukan proses vaksinasi secara kontinu dengan tingkat vaksinasi minimum atau melebihinya.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Dalam penelitian ini dianalisis model *SVIRS* pada proses penyebaran penyakit menular influenza. Analisis kestabilan model diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Analisis kestabilan masing-masing titik tetap diperoleh titik tetap bebas penyakit stabil jika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu $R_d \leq 1$. Sedangkan titik tetap endemik stabil jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu $R_d > 1$. Jadi, dinamika sistem model *SVIRS* sepenuhnya bergantung pada R_d .
2. Jika $R_d = 1$, ambang batas epidemik maka diperoleh tingkat minimum vaksinasi. Jika proses vaksinasi kontinu yang dilakukan kurang dari tingkat vaksinasi minimum akan menyebabkan $R_d > 1$. Jika proses vaksinasi kontinu yang dilakukan kurang dari tingkat vaksinasi minimum akan menyebabkan $R_d < 1$. Jadi influenza akan dapat diberantas dan menghilang dari populasi jika dilakukan proses vaksinasi secara kontinu dengan melebihi atau sama dengan tingkat vaksinasi minimum.
3. Hasil simulasi dengan nilai-nilai parameter yang eksplisit dan sesuai dengan penyakit influenza memperlihatkan bahwa kelompok manusia yang terinfeksi influenza lama-kelamaan menghilang dari populasi jika jumlah manusia yang divaksinasi diperbesar yang mengakibatkan $R_d < 1$. Jumlah manusia yang divaksinasi harus lebih besar atau sama dengan tingkat vaksinasi minimum agar penyakit influenza dapat dimusnahkan dari populasi. Untuk $R_d < 1$ mengakibatkan titik tetap endemik stabil yang berarti penyakit akan tetap ada dalam populasi.

Saran

Peneliti menyarankan agar dilakukan penelitian selanjutnya dengan model yang sama tetapi menggunakan strategi vaksinasi terputus dan membedakan dengan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Alexander, M.E., Bowman, C., Moghadas, S.M., Summers, R., Gumel A.B. dan Sahai, B.M. 2004. *A Vaccination Model for Transmission Dynamics of Influenza*. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 3 (4): 503-524.
- Anton, H. 1995. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi kelima. Terjemahan oleh Pantur Silaban dan I Nyoman Susiala. Jakarta: Erlangga.
- Blyuss, K.B. dan Yuliya N.K. 2005. *On a Basic Model of a Two-Disease epidemic*. Elsevier applied Mathematics and computation. Applied Mathematics and Computation: 177-187.
- Borelli, R.L. dan Coleman, C.S. 1998. *Diferential Equation*. John Willey and Son, Inc. USA.
- Edelstein-Keshet, L. 1998. *Mathematical Model in Biology*. New York: Random House.
- Kermack, W.O. dan McKendrick, A.G. 1997. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115 (8): 700-721.
- Kocak, H. & Hole, J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer-Verlag.
- Marentek, T. K. W. Y. 2011. *Strategi Vaksinasi Kontinu pada Model Epidemik SVIR*. IPB Bogor : Departeman Matematika.
- Soedarto, D.T.M. 2009. *Penyakit Menular di Indonesia*. Jakarta: Sagung Seto.
- Tailei Z. dan Zhidong Teng. 2007. *An SIRVS Epidemic Model With Pulse Vaccination Strategy*. Journal of Theoretical Biology: 375-381.