Pelabelan *Product Cordial* Graf Gabungan pada Beberapa Graf Sikel dan *Shadow Graph* Sikel

Ana Mawati*), Robertus Heri Sulistyo Utomo S.Si, M.Si*), Siti Khabibah S.Si, M.Sc*)
Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, UNDIP, Semarang

Abtrak
Misalkan graf $G = (V, E)$, Pelabelan *product cordial* adalah pelabelan titik *biner* $f: E(G) \to \{0, 1\}$ yang menginduksi pelabelan sisi $f^*: E(G) \to \{0, 1\}$ dengan $f^*(u, v) = f(u). f(v), \forall u, v \in E(G)$ sehingga memenuhi syarat $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| \leq 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$, dengan $v_f(0), v_f(1), e_f(0), e_f(1)$ berturut – turut menyatakan banyaknya titik yang berlabel 0, banyaknya titik yang berlabel 1, banyaknya sisi yang berlabel 0 dan banyaknya sisi yang berlabel 1. Path gabungan dari graf G adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan sisi antara G_i dan G_{i+1} untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$, dimana $G_1, G_2, \dots, G_n,\ n \geq 2$ dengan n salinan graf G. *Shadow graph* dari graf sikel dinotasikan dengan $D_2(C_n)$ adalah graf yang diperoleh dari dua graf sikel $C_n{}'$ dan $C_n{}''$ dengan menghubungkan setiap titik $u_{ij}{}' \in C_n{}'$ dengan sebuah sisi ke titik yang adjacent dengan $u_{ij}{}'' \in C_n{}''$ (titik $u_{ij}{}'' \in C_n{}''$ adalah bayangan atau *shadow* dari $u_{ij}{}' \in C_n{}'$). Dalam Tugas Akhir ini dibahas tentang pelabelan *product cordial* pada beberapa graf sikel serta *shadow graph* sikel.
Kata Kunci : pelabelan, *cordial*, sikel, biner, *path*, *shadow graph*.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama. Terdapat pula graf petersen yang diperumum yang merupakan salah satu subkelas graf reguler. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan doamin gabungan himpunan titik dan himpunan sisi

Definisi 1.1 :
Pelabelan graf merupakan pemetaan yang memetakan unsur – unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi saja (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan himpunan sisi (pelabelan total).

Definisi 1.2 :
Misalkan $G = (V(G), E(G))$ merupakan sebuah graf. Pelabelan titik *biner* adalah suatu pemetaan $f: V(G) \to \{0, 1\}$.
Definisi 1.3 :
Pelabelan sisi untuk graf $G = (V, E)$ didefinisikan $f^*: E(G) \to \{0, 1\}$ dengan $f^*(e) = f(u)f(v)$, dimana $e = (u, v) \in E(G)$.
Suatu pelabelan titik *biner* graf *G* disebut pelabelan *product cordial* jika $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$. Sebuah graf dengan pelabelan *product cordial* disebut juga graf *product cordial*. Notasi $v_f(0), v_f(1), e_f(0), e_f(1)$ berturut – turut menyatakan banyaknya titik yang berlabel 0, banyaknya titik yang berlabel 1, banyaknya sisi yang berlabel 0, dan banyaknya sisi yang berlabel 1.
Definisi 1.4 :
Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n,\ n \geq 2$ adalah n salinan graf *G*. Graf *G* yang diperoleh dengan menambahkan sisi antara G_i dan G_{i+1} untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$ disebut path gabungan dari *G*.
Definisi 1.5 :
Shadow graph dari graf sikel dinotasikan dengan $D_2(C_n)$ adalah graf yang diperoleh dari dua graf sikel $C_n{}'$ dan $C_n{}''$ dengan menghubungkan setiap titik $u_{ij}{}' \in C_n{}'$ dengan sebuah sisi ke titik yang adjacent dengan $u_{ij}{}'' \in C_n{}''$ (titik $u_{ij}{}'' \in C_n{}''$ adalah bayangan atau *shadow* dari $u_{ij}{}' \in C_n{}'$).

2. Hasil Utama

Teorema 2.1 :
Graf path gabungan dari *k* salinan C_n adalah graf *product cordial* kecuali untuk *k* ganjil dan *n* genap.
Bukti :
Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_k$ adalah *k* salinan dari sikel C_n dan *G* adalah graf path gabungan dari sikel C_n. Titik – titik dari salinan ke *i* dari *G* yaitu G_i dinotasikan dengan $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}$. Sisi yang menghubungkan G_i dan G_{i+1} dinotasikan dengan $e_i = u_{i1}u_{(i+1)1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Banyaknya titik dari *G* yaitu $|V(G)| = nk$ dan banyaknya sisi dari *G* yaitu $|E(G)| = nk + k - 1$.

Kasus I:
a. Untuk *n* genap, *k* genap
Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_{ij}) = 0; 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq \frac{k}{2}$$

$$f(u_{ij}) = 1; 1 \leq j \leq n, \frac{k}{2} < i \leq k$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v(0) = v(1) = \frac{nk}{2}$, dan $e(0) - 1 = e(1) = \frac{k(n+1)-2}{2}$
Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ maka untuk kasus *n* genap dan *k* genap merupakan graf *product cordial*.
b. Untuk *n* genap, *k* ganjil
Graf sikel C_n sebanyak *k* salinan mempunyai ciri – ciri sebagai berikut:

(i) Dua titik yang berderajat 3
(ii) $k-2$ titik yang berderajat 4
(iii) $nk-k$ titik yang berderajat 2

Graf dengan ciri di atas, akan memenuhi pelabelan *product cordial* bila $v_f(0) = v_f(1) = \frac{nk}{2}$ untuk *k* ganjil dan *n* genap. Dengan $v_f(0) = v_f(1) = \frac{nk}{2}$ yaitu jumlah titik yang berlabel 0 dan 1 sama banyak, maka sebarang pola palabelan titik yang dilakukan akan menginduksi label sisi untuk sebanyak $nk+k-1$ sisi selalu dihasilkan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \geq 2$. Hal ini bertentangan dengan syarat pelabelan *product cordial*.

Kasus II:

a. Untuk *n* ganjil, *k* genap

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0,1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_{ij}) = 0; 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq \frac{k}{2}$$
$$f(u_{ij}) = 1; 1 \leq j \leq n, \frac{k}{2} < i \leq k$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v(0) = v(1) = \frac{nk}{2}$, dan $e(0) - 1 = e(1) = \frac{k(n+1)-2}{2}$

Karena memenuhi syarat $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| \leq 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka untuk kasus *n* genap dan *k* ganjil merupakan graf *product cordial.*

b. Untuk *n* ganjil, *k* ganjil

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0,1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_{ij}) = 0; 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$$
$$\left.\begin{aligned} f(u_{ij}) &= 1;\ 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}, \\ &= 0;\ \frac{n+1}{2} < j \leq n, \end{aligned}\right\} i = \frac{k+1}{2}$$
$$f(u_{ij}) = 1; 1 \leq j \leq n, \frac{k+1}{2} < i \leq k$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(1) = v_f(0) + 1 = \frac{nk+1}{2}$ dan $e_f(0) - 1 = e_f(1) = \frac{k(n+1)-2}{2}$

Karena memenuhi syarat $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| \leq 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka untuk kasus n ganjil dan k genap merupakan graf *product cordial.*

c. Untuk *n* ganjil, *k* ganjil

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0,1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_{ij}) = 0; 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$$
$$\left.\begin{aligned} f(u_{ij}) &= 1;\ 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}, \\ &= 0;\ \frac{n+1}{2} < j \leq n, \end{aligned}\right\} i = \frac{k+1}{2}$$

$$f(u_{ij}) = 1; 1 \le j \le n, \frac{k+1}{2} < i \le k$$

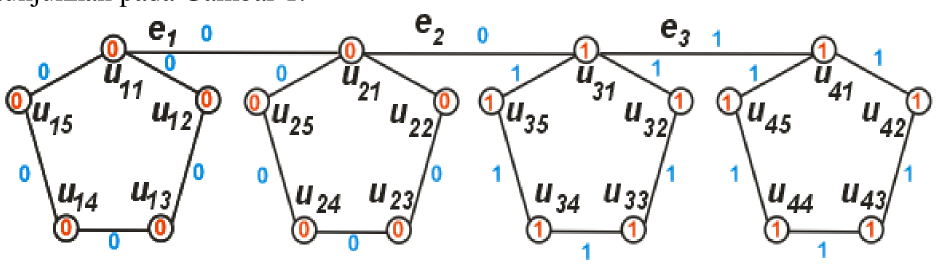
Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh

$v_f(1) = v_f(0) + 1 = \frac{nk+1}{2}$ dan $e_f(1) = e_f(0) - 1 = \frac{nk+k-2}{2}$

Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$ maka untuk kasus n ganjil dan k ganjil merupakan graf *product cordial.*

Ilustrasi 2.2 :

Diberikan graf G yang diperoleh dari path gabungan 4 salinan sikel C_5 untuk kasus n ganjil k genap yang akan ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Graf 4 salinan C_5

Teorema 2.3 :

Graf gabungan dua salinan graf C_n oleh path P_k merupakan pelabelan *product cordial*

Bukti:

Misalkan G merupakan graf gabungan dua salinan sikel C_n oleh path P_k. Dengan $u_1, u_2, \dots, u_n$ merupakan titik dari salinan sikel C_n pertama dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ merupakan titik dari sikel C_n salinan kedua. Sedangkan $w_1, w_2, \dots, w_k$ merupakan titik dari path P_k dengan $u_1 = w_1$ dan $v_1 = w_k$.

Banyaknya titik dari graf G adalah $|V(G)| = 2n + k - 2$ dan banyaknya sisi dari graf G adalah $|E(G)| = 2n + k - 1$.

Kasus I

a. Untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, $k \equiv 0 \ (mod\ 2)$

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_i) = 0; 1 \le i \le n$$
$$f(v_i) = 1; 1 \le i \le n$$
$$\left.\begin{aligned} f(w_j) &= 0; 1 < j \le \tfrac{k}{2} \\ &= 1; \tfrac{k}{2} < j < k \end{aligned}\right. , u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh

$v_f(0) = v_f(1) = \frac{2n+k-2}{2}$ dan $e_f(1) = e_f(0) - 1 = \frac{2n+k-2}{2}$

Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$ maka untuk kasus $n \equiv 0 (mod\ 2)$ dan $k \equiv 0 (mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial.*

b. Untuk $n \equiv 0 (mod\ 2)$, $k \equiv 1 (mod\ 2)$

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_i) = 0; 1 \le i \le n$$
$$f(v_i) = 1; 1 \le i \le n$$

$$f(w_j) = 0; 1 < j \leq \tfrac{k-1}{2} \qquad ,u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k$$
$$= 1; \tfrac{k-1}{2} < j < k$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(0) = v_f(1) - 1 = \frac{2n+k-3}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = \frac{2n+k-1}{2}$
Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ maka untuk kasus $n \equiv 0(mod\ 2)$ dan $k \equiv 1(mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial*.

Kasus II

a. Untuk $n \equiv 1(mod\ 2)$, $k \equiv 0(mod\ 2)$

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_i) = 0; 1 \leq i \leq n$$
$$f(v_i) = 1; 1 \leq i \leq n$$
$$\left.\begin{array}{l} f(w_j) = 0; \\ f(w_j) = 1; \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 < j \leq \frac{k}{2}, u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k \\ \frac{k}{2} < j < k, u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k \end{array}$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(0) = v_f(1) = \frac{2n+k-2}{2}$ dan $e_f(1) = e_f(0) - 1 = \frac{2n+k-2}{2}$
Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$ maka untuk kasus $n \equiv 1(mod\ 2)$ dan $k \equiv 0(mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial.*

b. Untuk $n \equiv 1(mod\ 2)$, $k \equiv 1(mod\ 2)$

Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(u_i) = 0; 1 \leq i \leq n$$
$$f(v_i) = 1; 1 \leq i \leq n$$
$$\left.\begin{array}{l} f(w_j) = 0; \\ f(w_j) = 1; \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 < j \leq \frac{k-1}{2}, u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k \\ \frac{k-1}{2} < j < k, u_1 = w_1 \text{ dan } v_1 = w_k \end{array}$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(0) = v_f(1) - 1 = \frac{2n+k-3}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = \frac{2n+k-1}{2}$.
Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \leq 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \leq 1$, maka untuk kasus $n \equiv 1(mod\ 2)$ dan $k \equiv 1(mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial*.

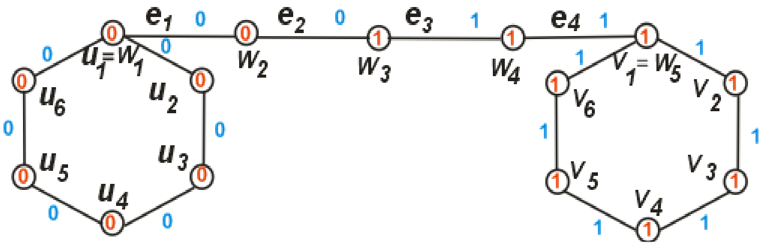
Dari pola pelabelan di atas mendefinisikan bahwa graf *G* merupakan pelabelan *product cordial* dan setiap kasusnya memenuhi syarat yang ditunjukkan pada Tabel 1.
Diberikan $n = 2a + b, k = 2c + d$ dimana $a, c \in N$.

Tabel 1 Kondisi titik dan sisi pada graf gabungan dua salinan graf C_n oleh path P_k

b	d	Kondisi titik	Kondisi sisi
0	1	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1) + 1$
	0	$v_f(0) + 1 = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$

1	1	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1) + 1$
	0	$v_f(0) + 1 = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$

Ilustrasi 2.4 :
Diberikan graf G yang diperoleh dari dua salinan C_6 oleh path P_5 untuk kasus $n \equiv 0(mod\ 2)$ dan $k \equiv 1(mod\ 2)$ yang akan ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2 Graf dua salinan C_6 oleh path P_5

Teorema 2.5 :
Graf dengan path gabungan dari k salinan shadow graf $D_2(C_n)$ adalah graf *product cordial* kecuali untuk k ganjil.

Bukti:
Misalkan *shadow graph* dari sikel C_n dinotasikan dengan $D_2(C_n)$. Graf G merupakan path gabungan k salinan $G_1, G_2, \ldots, G_k$ dari *shadow graph* $D_2(C_n)$. Salinan pertama dari sikel C_n adalah $G'_1, G'_2, \ldots, G'_k$ dan salinan kedua dari sikel C_n adalah $G"_1, G"_2, \ldots, G"_k$. Dengan titik dari G'_i adalah $u_{i1}', u_{i2}', \ldots, u_{in}'$ dan titik dari $G"_i$ adalah $u_{i1}", u_{i2}", \ldots, u_{in}"$. Sisi yang menggabungkan G_i dan G_{i+1} didefinisikan $e_i = u_{i1}"u_{(i+1)1}"$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
Banyak titik dari graf G adalah $|V(G)| = 2nk$ dan banyak sisi dari graf G adalah $|E(G)| = 4nk + k - 1$.

Kasus I: k = genap
Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\left.\begin{array}{l} f(u_{ij}') = 0; \\ f(u_{ij}") = 0; \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \le i \le \frac{k}{2} \\ 1 \le j \le n \end{array}$$

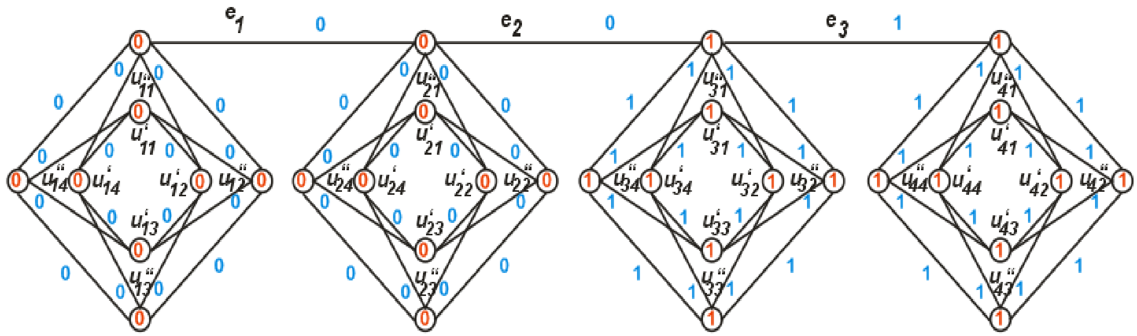
$$\left.\begin{array}{l} f(u_{ij}') = 1; \\ f(u_{ij}") = 1; \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{k}{2} < i \le k \\ 1 \le j \le n \end{array}$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(0) = v_f(1) = nk$ dan $e_f(1) = e_f(0) - 1 = \frac{4nk+k-2}{2}$.
Karena memenuhi syarat $|v_f(0) - v_f(1)| \le 1$ dan $|e_f(0) - e_f(1)| \le 1$ maka untuk kasus k genap merupakan graf *product cordial.*

Kasus II : k = ganjil

Banyaknya titik pada graf G atau $|V(G)| = 2nk$ adalah genap. Dengan $\frac{k-1}{2}$ titik salinan pertama $D_2(C_n)$ berlabel 0 dan $\frac{k-1}{2}$ titik salinan terakhir $D_2(C_n)$ berlabel 1. Untuk salinan $D_2(C_n)$ yang ke $\frac{k+1}{2}$, n titik yang berderajad empat berlabel 0 dan n titik sisanya berlabel 1.
Sehingga untuk pelabelan sisinya diperoleh $|e_f(0) - e_f(1)| > 2$.
Jadi graf G bukan graf *product cordial* ketika k ganjil.

Ilustrasi 2.6 :
Diberikan graf G yang diperoleh dari path gabungan 4 salinan $D_2(C_4)$ untuk kasus k = genap yang akan ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3 Graf 4 salinan $D_2(C_4)$

Teorema 2.7 :
Graf gabungan dua salinan shadow graph $D_2(C_n)$ oleh path P_k merupakan graf *product cordial.*
Bukti :
Misalkan $D_2(C_n)$ merupakan *shadow graph* dari sikel C_n dan graf G adalah graf yang diperoleh dari gabungan dua salinan $D_2(C_n)$ oleh path P_k. Salinan pertama $D_2(C_n)$ titik $u_1', u_2', \dots, u_n'$ merupakan titik dari C_n' dan $u_1", u_2", \dots, u_n"$ merupakan titik dari $C_n"$. kemudian salinan kedua $D_2(C_n)$ titik $v_1', v_2', \dots, v_n'$ merupakan titik dari C_n' dan titik $v_1", v_2", \dots, v_n"$ merupakan titik dari $C_n"$. Sedangkan $w_1, w_2, \dots, w_k$ merupakan titik dari path P_k dengan $u_1' = w_1$ dan $v_1" = w_k$. Banyaknya titik dari graf G adalah $|V(G)| = 4n + k - 2$ dan banyaknya sisi dari graf G adalah $|E(G)| = 8n + k - 1$.

Kasus I : $k \equiv 0 (mod\ 2)$
Pelabelan titik $f: V(G) \to \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\left.\begin{array}{l} f(u_i') = 0; \\ f(u_i") = 0; \end{array}\right\} 1 \le i \le n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(v_i') = 1; \\ f(v_i") = 1; \end{array}\right\} 1 \le i \le n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(w_j) = 0; \\ f(w_j) = 1; \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 < j \le \frac{k}{2}, u_1" = w_1 \text{ dan } v_1" = w_k \\ \frac{k}{2} < j < k, u_1" = w_1 \text{ dan } v_1" = w_k \end{array}$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh

$v_f(0) = v_f(1) = \frac{4n+k-2}{2}$ dan $e_f(1) = e_f(0) - 1 = \frac{8n+k-2}{2}$.
Karena memenuhi syarat $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| \leq 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka untuk kasus $k \equiv 0(mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial.*

Kasus II : $k \equiv 1(mod\ 2)$

Pelabelan titik $f: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\left.\begin{array}{l} f(u_i') = 0; \\ f(u_i'') = 0; \end{array}\right\} 1 \leq i \leq n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(v_i') = 1; \\ f(v_i'') = 1; \end{array}\right\} 1 \leq i \leq n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(w_j) = 0; \\ f(w_j) = 1; \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 < j \leq \frac{k-1}{2}, u_1'' = w_1 \text{ dan } v_1'' = w_k \\ \frac{k-1}{2} < j < k, u_1'' = w_1 \text{ dan } v_1'' = w_k \end{array}$$

Sesuai dengan definisi pelabelan titik di atas diperoleh
$v_f(1) = v_f(0) - 1 = \frac{4n+k-1}{2}$ dan $e_f(0) = e_f(1) = \frac{8n+k-1}{2}$.
Karena memenuhi syarat $\left|v_f(0) - v_f(1)\right| \leq 1$ dan $\left|e_f(0) - e_f(1)\right| \leq 1$ maka untuk kasus $k \equiv 1(mod\ 2)$ merupakan graf *product cordial.*

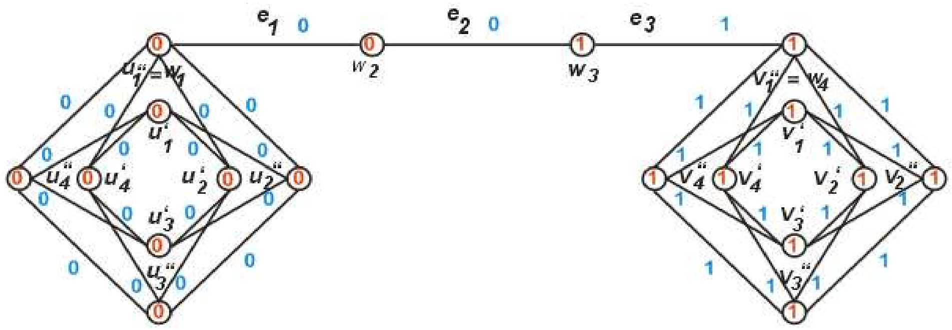
Dari pola pelabelan di atas mendefinisikan bahwa graf *G* merupakan pelabelan *product cordial* dan setiap kasusnya memenuhi syarat yang ditunjukkan pada Tabel 2.
Diberikan $n = 2a + b, k = 2c + d$ dimana $a, c \in N$.

Tabel 2 Kondisi titik dan sisi pada graf gabungan dua salinan *shadow graph* $D_2(C_n)$ oleh path P_k

b	d	Kondisi titik	Kondisi sisi
0	1	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1) + 1$
	0	$v_f(0) + 1 = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$
1	1	$v_f(0) = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1) + 1$
	0	$v_f(0) + 1 = v_f(1)$	$e_f(0) = e_f(1)$

Ilustrasi 2.8 :

Diberikan graf G yang diperoleh dari dua salinan $D_2(C_4)$ oleh path P_4 untuk kasus $k \equiv 0(mod\ 2)$ yang akan ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4 Graf dua salinan $D_2(C_4)$ oleh path P_4

3. REFERENSI

[1] Chartrand, G. and Lesniak, L. 1996. "*Graphs & Digraphs,* 3^{rd} *ed*". Chapman & Hill. London.

[2] Vaidya, S. K., K. K. Kanani. 2010. "*Some Cycle Related Product Cordial Graph*". International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics, vol. 3, no. 1, halaman 109-116.