# Energi Derajat Maksimal pada Graf Terhubung

Destika Dwi Setyowidi, Lucia Ratnasari S.Si, M.Si
Program Studi Matematika Jurusan Matematika Universitas Diponegoro Semarang

## ABSTRAK

Graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan titik $G$ dan $E(G)$ adalah himpunan sisi $G$. Graf $G$ dapat direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal. Dari matriks derajat maksimal diperoleh polinomial karakteristik $\mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \cdots + c_n$ dengan koefisien $c_1$ merupakan $trace M(G)$, $c_2$ merupakan penjumlahan dari determinan submatriks order 2, $c_3$ merupakan penjumlahan dari determinan submatriks order 3. Energi derajat maksimal graf $G$ adalah penjumlahan dari harga mutlak nilai eigen derajat maksimal. Energi derajat maksimal graf star $(S_{n+1})$, graf sikel $(C_n)$, graf path $(P_n)$, dan graf regular $r$ bernilai kurang dari energi derajat maksimal graf komplit $(K_n)$. Energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan rasional dengan bilangan rasional tersebut adalah bilangan bulat genap.

**Kata kunci**: Matriks derajat maksimal, nilai eigen, energi suatu graf.

## Pendahuluan

Graf merupakan diagram yang terdiri dari noktah- noktah yang disebut titik, pengaitan titik- titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola- pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas- kelas graf. Beberapa kelas graf yang popular antara lain graf komplit $K_n$, graf lingkaran (sikel) $C_n$, graf lintasan (path) $P_n$, graf bipartit $K_{m,,n}$.

Perkembangan teori graf didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu matematika yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu ini dapat dihubungkan dengan merepresentasikan graf dalam suatu matriks yaitu matriks adjacency. Dari matriks adjacency akan diperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen, yang dapat digunakan untuk mencari energi suatu graf. Energi suatu graf didefinisikan pada tahun 1978 oleh Gutman sebagai penjumlahan harga mutlak dari nilai- nilai eigen. Pada tugas akhir ini akan dibahas mengenai energi derajat maksimal graf yang didasarkan pada nilai eigen derajat maksimal.

## Teori Penunjang

### Definisi 2.1 [5]

Sebuah matriks adalah suatu himpunan angka, variabel atau parameter dalam bentuk suatu persegi panjang, yang tersusun didalam baris dan kolom.

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom. Dalam penulisan, huruf besar digunakan untuk menyatakan matriks-matriks. Jika A adalah sebuah matriks, maka untuk menyatakan entri pada baris $i$ dan kolom $j$ dari $A$ adalah menggunakan $a_{ij}$.
Bentuk umum matriks adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \; atau \; [a_{ij}]_{m\times n}$$

**Definisi 2.2 [3]**

Suatu matriks $A$ dengan $n$barisdan $n$ kolomdisebut matriks persegiberorde $n$(*square matrix of order* $n$)dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama (*main diagonal*) matriks $A$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.3** [3]

Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari $A$ dinyatakan dengan $A^T$, didefinisikan sebagai matris $n \times m$ yang didapat dengan mempertukarkan baris- baris dan kolom- kolom dari $A$. Jadi kolom pertama dari $A^T$ adalah baris pertama dari $A$, kolom kedua dari $A^T$ adalah baris kedua dari $A$.

**Definisi 2.4 [10]**

Suatu matriks persegi $A$adalah simetris jika memenuhi $A = A^T$ dengan $a_{ij} = a_{ji}$.

**Definisi 2.5 [5]**

Matriks Diagonal adalah suatu matriks persegi yang semua entri diluar entri diagonal utama sama dengan nol, dan paling tidak satu entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol.

**Definisi 2.6 [10]**

Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan semua entri pada diagonal utamanya adalah 1 dan 0 pada entri lainnya yang dinotasikan dengan$I$.

**Definisi 2.7 [5]**

Determinan adalah suatu skalar (angka) yang diturunkan dari suatu matriks persegi melalui operasi khusus. Disebut operasi khusus karena dalam proses penurunan determinan dilakukan perkalian-perkalian sesuai dengan aljabar matriks.

**Definisi 2.8 [3]**

Diketahui $A$adalah matriks $n \times n$, sebuah vektor tak nol $x$pada $R^n$ disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari $A$jika $Ax$adalah kelipatan skalar dari $x$, yaitu$Ax = \lambda x$untuk suatu skalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari $A$, dan $x$adalah vektor eigen dari $A$yang bersesuaian dengan $\lambda$.

**Definisi 2.9 [3]**

Diketahui A adalah sebuah matriks persegi, **trace dari A** yang dinyatakan sebagai $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$, didefinisikan sebagai jumlah entri- entri pada diagonal utama A. Trace dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks persegi, karena matriks yang mempunyai diagonal utama hanya matriks persegi.

**Definisi 2.10 [6]**

Graf $G$didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V, E)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan dari titik-titik $G$dan $E(G)$adalah himpunan sisi $G$yang menghubungkan sepasang titik.

**Graf**

**Definisi 2.10 [6]**

Graf $G$didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V, E)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan dari titik-titik $G$dan $E(G)$ adalah himpunan sisi $G$yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi graf menyatakan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$boleh kosong, jadi sebuah graf dimungkinkan sama sekali tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Himpunan titik dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sedangkan $e$adalah sisi yang menghubungkan titik $v_i$dengan titik $v_j$, maka *e* dapat ditulis sebagai $e = v_i v_j$.

**Definisi 2.11 [6]**

Dua buah titik pada graf $G$ dikatakan *adjacent* bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, $v_i$ adjacent dengan $v_j$ jika $(v_i, v_j)$ adalah sebuah sisi pada graf $G$.

**Definisi 2.12 [6]**

Untuk sembarang sisi $e = v_i v_j$, dikatakan *incident* dengan titik $v_i$ dan titik $v_j$.

**Definisi 2.13 [6]**

Titik terpencil (*isolated vertex*) adalah titik yang tidak mempunyai sisi yang *incident* dengannya atau dapat juga dinyatakan bahwa titik terpencil adalah titik yang tidak satupun *adjacent* dengan titik-titik lainnya.

**Definisi 2.14 [6]**

Derajat suatu titik pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang *incident* dengan titik
tersebut. Derajat dari titik $v$dinotasikan dengan $d(v)$. Sedangkan derajat graf $G$ adalah jumlah derajat semua titik graf $G$.

**Definisi 2.15 [6]**

Lintasan yang panjangnya $n$ dari titik awal $v_0$ ke titik tujuan $v_n$ di dalam graf $G$ ialah barisan berselang seling titik- titik dan sisi- sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots,$ $v_{n-1}, e_n, v_n$, sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_1 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi- sisi dari graf $G$.

**Definisi 2.16 [6]**

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut siklus *(cycle).*

**Definisi 2.17 [6]**

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai $N_n$.

**Definisi 2.18 [9]**

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda, dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop. Graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda disebut graf sederhana, sedangkan graf yang mempunyai loop dan sisi ganda disebut graf tidak sederhana.

**Graf Sederhana Khusus**

**Definisi 2.15 [6]**

Lintasan yang panjangnya $n$ dari titik awal $v_0$ ke titik tujuan $v_n$ di dalam graf $G$ ialah barisan berselang seling titik- titik dan sisi- sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots,$ $v_{n-1}, e_n, v_n$, sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_1 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi- sisi dari graf $G$.

**Definisi 2.16 [6]**

Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut siklus *(cycle).*

**Definisi 2.17 [6]**

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis sebagai $N_n$.

**Definisi 2.18 [9]**

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda, dan sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut loop. Graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda disebut graf sederhana, sedangkan graf yang mempunyai loop dan sisi ganda disebut graf tidak sederhana.

## Matriks Adjacency

**Definisi 2.26 [8]**

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan$V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$, titik-titik $v_i$ dan $v_j$ adalah *adjacent* dari suatu graf dengan matriks $n \times n$ dengan entri pada barisan $i$ dan kolom $j$adalah banyaknya sisi yang menghubungkan titik $v_i$ dan $v_j$.

Misal $A = [a_{ij}]$ adalah matriks *adjacency* dari suatu graf sederhana $G$maka,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , jika v_i dan v_j adjacent \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

Matriks *adjacency* untuk graf sederhana dan tidak berarah selalu simetris, dan diagonal utama matriks selalu bernilai 0, karena tidak mengandung loop.

## Pembahasan

### Energi Derajat Maksimal Graf $G$

**Definisi 3.1 [1]**

Energi pada graf $G$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

dengan $\lambda_i$ adalah nilai eigen dari matriks *adjacency*$A(G)$.

**Definisi 3.2 [1]**

$G$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $d_i$ adalah derajat titik

$v_i$ dan $d_j$ adalah derajat titik $v_j$. Matriks $M(G) = [d_{ij}]$ disebut sebagai matriks derajat maksimal dari $G$ dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \max\{d_i, d_j\}, jika v_i dan v_j adjacent \\ 0 \quad , lainnya \end{cases}$$

**Definisi 3.3 [1]**

Polinomial karakteristik pada matriks derajat maksimal $M(G)$ adalah

$$\emptyset(G; \mu) = \det(\mu I - M(G))$$

$$= \mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \cdots + c_n,$$

dengan $I$ merupakan matriks identitas dan akar- akar $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ merupakan nilai eigen derajat maksimal dari $G$.

**Definisi 3.4 [1]**

Jika terdapat matriks derajat maksimal $M(G)$, maka energi derajat maksimal graf $G$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{E}_M(G) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$$

dengan $\mu_i$ adalah nilai eigen dari matriks derajat maksimal $M(G)$.

**Definisi 3.5 [1]**

Untuk setiap graf sederhana $G$

$$trace M(G) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$$

**Teorema 3.1 [1]**

Untuk setiap graf terhubung $G$, $\mathcal{E}_M(G) = 2\mathcal{E}(G)$ dengan derajat maksimal$\Delta = 2$ dan $n > 2$

**Bukti**

$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ dan $\mathcal{E}_M(G) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$. Nilai eigen dari matriks derajat maksimal $M(G)$ selalu lebih besar dari nilai eigen dari matriks adjacency $A(G)$.

a. Graf dengan derajat maksimal $\Delta = q$ dengan $q \geq 3$, $\mathcal{E}(G) \neq q\mathcal{E}_M(G)$.
b. Graf dengan derajat maksimal $\Delta = 1$ maka $n = 2$, sehingga $\mathcal{E}_M(G) = \mathcal{E}(G)$.
c. Graf dengan derajat maksimal $\Delta = 2$ dan $n > 2$ derajat maksimal setiap titik pasti bernilai 2, sehingga $\mathcal{E}_M(G) = 2\mathcal{E}(G)$.

### Koefisien polinomial karakteristik untuk matriks derajat maksimal $M(G)$

**Teorema 3.2 [1]**

Polinomial karakteristik matriks derajat maksimal $M(G)$dinotasikan sebagai $\emptyset(G; \mu) = \mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \cdots + c_n$ dengan

i. $c_1 = 0$

ii. $c_2 = -\sum_{1 \le i < j \le n} \left(d_{ij}\right)^2$

iii. $-c_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$

**Bukti**

i. $c_1 = 0$karena$trace M(G) = 0$

ii. Diambil submatriks $M(G)$ orde 2 yaitu: $\begin{bmatrix} 0 & d_{ij} \\ d_{ji} & 0 \end{bmatrix}$ dengan $v_i$ dan $v_j$ *adjacent* sehingga diperoleh determinan submatriks $M(G)$ orde 2 adalah $-(d_{ij})^2$. Jadi

$$c_2 = -\sum_{1 \le i < j \le n}^{n} (d_{ij})^2$$

dengan banyaknya principal minor $M(G)$samadengan banyaknya sisi pada $G$.

iii. Diambil submatriks $M(G)$ orde 3 dengan entri diagonal utama sama dengan nol, dan entri selain diagonal utama tidak boleh nol,maka

$$-c_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$$

***Remarks* 3.1 [1]**

Jika $G$ adalah graf sederhana yang tidak mempunyai segitiga, maka $c_3 = 0$

**Bukti**

Diketahui bahwa

$-c_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$, dengan banyaknya principal minor samadengan banyaknya segitiga pada graf $G$, karena graf $G$ tidak mempunyai segitiga maka entri selain diagonal utama ada yang bernilai nol. Jadi $c_3 = 0$.

**Teorema 3.3 [1]**

Jika $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf $G$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} {\mu_i}^2 = -2c_2$$

**Bukti**

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = trace M(G) = d_{ii} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} {\mu_i}^2 = trace\ (M(G))^2$$

untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$, dimana $(i, i)$ adalah entri $(M(G))^2$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(d_{ij}\, d_{ji}\right)$$

$$= 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \left(d_{ij}\right)^2$$

$$= -2c_2$$

***Remarks* 3.2 [1]**

Untuk $G = K_n$

$$\sum_{i=1}^{n} {\mu_i}^2 = n(n-1)^3$$

**Bukti**

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = -2c_2 = -2\left(-\sum_{1 \le i < j \le n} \left(d_{ij}\right)^2\right)$$

dengan banyaknya principal minor dari $M(G) = \frac{n(n-1)}{2}$

untuk $-(d_{ij})^2 = -(n-1)^2$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = -2\left(-\sum_{1 \le i < j \le n} \left(d_{ij}\right)^2\right)$$

$$= n(n-1)^3$$

**Teorema 3.4 [1]**

Jika $G$ graf orde $n$, dengan $d(v_1) = d(v_2) = d$ dan $N(v_1) - v_2 = N(v_2) - v_1$, maka $\beta$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf $G$, dengan

$$\beta = \begin{cases} -d & , jika v_1 dan v_2 adjacent \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

**Bukti**
Diberikan graf $G$ orde $n$ dengan matriks derajat maksimal

$$M(G)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

maka

$$\emptyset(G;\mu)=\begin{vmatrix} \mu & -d & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -d & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Jika $R_i$ adalah baris ke-i pada $|\mu I - M(G)|$, maka
$R_1 = (\mu, \beta, -a_{13}, \dots, -a_{1n})$
$R_2 = (\beta, \mu, -a_{23}, \dots, -a_{2n})$
sehingga

$$\emptyset(G;\mu)=\begin{vmatrix} \mu & \beta & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ \beta & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

dengan

$$a_k=\begin{cases} \max(d_1,d_k) & , jika\ adjacent, k = 3,4,\dots,n \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

maka

$$\emptyset(G;\mu)=\begin{vmatrix} \mu & \beta & -a_3 & \dots & -a_n \\ \beta & \mu & -a_3 & \dots & -a_n \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

$R_1$ dikurangi dengan $R_2$, sehingga diperoleh $R_1 - R_2 = (\mu-\beta, \beta-\mu, 0, \dots, 0)$.
Kemudian $R_1$ diganti dengan hasil pengurangannya sehingga diperoleh

$$\emptyset(G;\mu)=\begin{vmatrix} \mu-\beta & \beta-\mu & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

$$=(\mu-\beta)^2\left\{\begin{vmatrix} \mu & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{32} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{21} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & \mu & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{mn} & -a_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}\right\}$$

Jadi $\beta$ adalah nilai eigen derajat maksimal $M(G)$.

## Energi Derajat Maksimal untuk Beberapa Kelas Graf

**Teorema 3.5 [1]**

Jika $G$ adalah graf komplit $K_n$, maka $-(n-1)$ dan $(n-1)^2$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf $G$ dengan multiplisitas berturut- turut $(n-1)$ dan 1, serta $\mathcal{E}_M(K_n) = 2(n-1)^2$.

**Bukti**
$R_2, R_3, \dots, R_n$ dikurangi dengan $R_1$, sehingga$|\mu I - M(K_n)|$:

$$=\big(\mu+(n-1)\big)^{n-1}\Big\{\mu-\underbrace{(n-1)-(n-1)-(n-1)-\dots-(n-1)}_{n-1}\Big\}$$

$$=\big(\mu+(n-1)\big)^{n-1}\{\mu-(n-1)^2\}$$

dengan nilai eigen
$\mu_1 = -(n-1), \mu_2 = -(n-1)$,
$\mu_3 = -(n-1)$,...,$\mu_{n-1} = -(n-1)$,
$\mu_n = (n-1)^2$
Jadi
$\mathcal{E}_M(K_n) = 2(n-1)^2$

**Teorema 3.6 [1]**

Jika $G$ adalah graf regular $r$, $r^2$ merupakan nilai eigen derajat maksimal graf $G$, dan $\mathcal{E}_M(G) \le \mathcal{E}_M(K_n)$ dengan

$$r \le \left(\frac{4(n-1)^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

**Bukti**

$|\mu I - M(G)| =$

$$\begin{vmatrix} \mu & -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ -r_{21} & \mu & -r_{23} & \dots & -r_{2n} \\ -r_{31} & -r_{32} & \mu & \dots & -r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{mn} & -r_{mn} & -r_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Pada kolom pertama diganti dengan jumlahan dari semua kolom, sehingga $|\mu I - M(G)|$ menjadi

$$\begin{vmatrix} \mu - rx & -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ \mu - rx & \mu & -r_{23} & \dots & -r_{2n} \\ \mu - rx & -r_{32} & \mu & \dots & -r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu - rx & -r_{mn} & -r_{mn} & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Dari hasil $|\mu I - M(G)|$ dapat dilihat bahwa $(\mu - rx)$ adalah faktor dari $|\mu I - M(G)|$, dengan $r$ adalah derajat maksimal setiap titik dan $x$ adalah banyaknya titik yang *adjacent*, sehingga$(\mu - rx) = (\mu - r^2)$ dengan $r^2$ adalah nilai eigen derajat maksimal graf $G$ dan $trace(M(C_n))^2 = nr^3$ dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy- Schwartz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2\right)$$

$$\left(\mathcal{E}_M(G)\right)^2 \leq n^2 r^3$$

$\left(\mathcal{E}_M(G)\right)^2 \leq \left(\mathcal{E}_M(K_n)\right)^2$ jika

$$n^2 r^3 \leq (2(n-1)^2)^2$$

$$n^2 r^3 \leq 4(n-1)^4$$

$$r^3 \leq \frac{4(n-1)^4}{n^2}$$

$$r \leq \left(\frac{4(n-1)^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Jadi $\mathcal{E}_M(G) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$

**Teorema 3.7 [1]**

Jika $G$ adalah graf star $S_{n+1}$ dengan orde $n+1$, maka $\emptyset(S_{n+1};\mu) = \mu^{n-1}(\mu^2 - n^3)$dan $\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \leq \mathcal{E}_M(K_{n+1})$

**Bukti**

1. Graf star $S_{n+1}$

Jika graf star direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal, maka

$$M(S_{n+1}) = \begin{bmatrix} 0 & n & n & n & \dots & n \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

dari matriks derajat maksimal diperoleh

$$\emptyset(S_{n+1};\mu) = \begin{vmatrix} 0 & -n & -n & -n & \dots & -n \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$= \mu^{n+1} - (n^2 \cdot \mu^{n-1} \cdot n)$

$= \mu^{n-1} \cdot \mu^2 - (n^2 \cdot \mu^{n-3} \cdot \mu^2 \cdot n)$

$= (\mu^{n-1})(\mu^2 - n^3)$

dengan nilai eigen sebagai berikut

$\mu_1 = \sqrt{n^3}, \mu_2 = 0, \dots, \mu_n = 0,$

$\mu_{n+1} = -\sqrt{n^3}$

Jadi

$\mathcal{E}_M(S_{n+1}) = \left|\sqrt{n^3}\right| + \left|-\sqrt{n^3}\right| = 2\sqrt{n^3}$

i. 2. Graf komplit $K_{n+1}$

Jika graf komplit direpresentasikan ke dalam matriks derajat maksimal, maka

$$M(K_{n+1}) = \begin{bmatrix} 0 & n & n & n & \dots & n \\ n & 0 & n & n & \dots & n \\ n & n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

dari matriks derajat maksimal diperoleh

$$\emptyset(K_{n+1};\mu) = \begin{vmatrix} \mu & -n & -n & -n & \dots & -n \\ -n & \mu & -n & -n & \dots & -n \\ -n & -n & \mu & -n & \dots & -n \\ -n & -n & -n & \mu & \dots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & -n & -n & -n & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

Kurangi$\boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_3}, \boldsymbol{R_4}, \dots, \boldsymbol{R_{n+1}}$ dengan $\boldsymbol{R_1}$

Ganti $\boldsymbol{R_2}, R_3, R_4, \dots, R_{n+1}$dengan hasil pengurangan, sehingga

$\emptyset(K_{n+1};\mu) = (\mu + n)^n\{\mu - n^2\}$

dengan nilai eigen sebagai berikut
$\mu_1 = n^2$, $\mu_2 = -n$, $\mu_3 = -n$, ... , $\mu_n = -n$, $\mu_{n+1} = -n$
Jadi $\mathcal{E}_M(K_{n+1}) = 2n^2$
sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \leq \mathcal{E}_M(K_{n+1})$

**Teorema 3.8 [1]**

Jika $G$ adalah graf sikel $C_n$ dengan orde $n$, untuk $n \geq 3$, maka
$trace(M(C_n))^2 = 8n$ dan $\mathcal{E}_M(C_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

**Bukti**
Graf sikel adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat 2 dan mengandung satu sikel. Graf sikel dapat dibentuk untuk $n \geq 3$. $trace\big(M(C_n)\big)^2 = 8n$, karena derajat maksimal graf sikel kurang dari sama dengan derajat maksimal graf komplit/ $\Delta C_n \leq \Delta K_n$, sehingga $|\mu_i|$ pada $C_n \leq |\mu_i|$ pada $K_n$. Jadi $\mathcal{E}_M(G) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

**Teorema 3.9 [1]**

Jika $G$ adalah graf path $(P_n)$ orde $n$, untuk $n \geq 3$, maka $trace\big(M(P_n)\big)^2 = 8(n-1)$ dan $\mathcal{E}_M(P_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$

**Bukti**
Graf Path adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal dengan $n$ titik dan $n-1$ sisi.
$trace\big(M(P_n)\big)^2 = 8(n-1)$. Derajat maksimal graf path kurang dari sama dengan derajat maksimal graf komplit/ $\Delta P_n \leq \Delta K_n$ dan $|\mu_i|$ pada $P_n \leq |\mu_i|$ pada $K_n$,
sehingga $\mathcal{E}_M(P_n) \leq \mathcal{E}_M(K_n)$.

**Teorema 3.10 [1]**

Jika $G$ adalah graf bipartit dan $\mu$ adalah nilai eigen derajat maksimal $G$ dengan multiplisitas $m$ maka $-\mu$ juga merupakan nilai eigen dengan multiplisitas $m$.

**Bukti**
Tambahkan titik- titik terpencil pada graf untuk mendapatkan himpunan partisi yang berukuran sama dan tambahkan setiap baris dan kolom dengan nol untuk matriks derajat maksimal, dengan rank tidak berubah. Oleh karena itu diasumsikan bahwa himpunan partisi mempunyai ukuran yang sama. Karena $G$ adalah graf bipartit, maka urutan baris dan kolom dapat ditukar sehingga menjadi $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$, dengan $B$ adalah matriks persegi.
Jika $\mu$ adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka

$$\mu\bar{v} = M(G)\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ B^t x \end{pmatrix}$$

Sehinggga $By = \mu x$ dan $B^t x = \mu y$
Jika $\bar{v}' = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} M(G)\bar{v}' &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By \\ B^t x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu x \\ \mu y \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\ &= -\mu\bar{v}' \end{aligned}$$

Oleh karena itu $\bar{v}'$ adalah vektor eigen $M(G)$ yang bebas linier untuk nilai eigen $-\mu$ dengan multiplisitas $m$ dan $\bar{v}$ adalah vektor eigen $M(G)$ yang bebas linier untuk nilai eigen $\mu$ dengan multiplisitas $m$ . Jadi $-\mu$ adalah nilai eigen $M(G)$ dengan multiplisitas sama dengan $\mu$.

**Teorema 3.11 [1]**

Jika energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan rasional, maka bilangan rasional tersebut adalah bilangan bulat genap.

**Bukti**
Jika $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ merupakan nilai eigen derajat maksimal graf $G$ dengan $n$ titik, maka $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ dengan $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_r$ adalah positif dan $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \mu_{r+3}, \dots, \mu_n$ bukan bilangan positif.
Sehingga

$$\mathcal{E}_M(G) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$$
$$= \underbrace{|\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + \cdots + |\mu_r|}_{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|} +$$
$$|\mu_{r+1}| + |\mu_{r+2}| + |\mu_{r+3}| + \cdots + |\mu_n|$$
$$= 2(|\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + \cdots + |\mu_r|)$$

Karena $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_r$ adalah nilai eigen dari $M(G)$, maka penjumlahan dari nilai eigen derajat maksimal berupa bilangan bulat positif. Energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$ sama dengan dua kali penjumlahan nilai eigen derajat maksimal, maka $\mathcal{E}_M(G)$ berupa bilangan bulat positif genap.

**Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya mengenai energi derajat maksimal suatu graf, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut**:**

1. Koefisien Polinomial karakteristik $\emptyset(G;\mu) = \mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \cdots + c_n$ pada matriks derajat maksimal $M(G)$ adalah sebagai berikut:
   i. $c_1 = 0$
   ii. $c_2 = -\sum_{1 \le i < j \le n} \left(d_{ij}\right)^2$
   iii. $-c_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} \begin{vmatrix} 0 & d_{ij} & d_{ik} \\ d_{ji} & 0 & d_{jk} \\ d_{ki} & d_{kj} & 0 \end{vmatrix}$

   setelah mencari polinomial karakteristik akan diperoleh nilai eigen derajat maksimal graf $G$, dan energi derajat maksimal $\mathcal{E}_M(G)$dapat diperoleh dari penjumlahan harga mutlak dari nilai eigen derajat maksimal.
2. Energi derajat maksimal graf sikel lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit $(\mathcal{E}_M(C_n) \le \mathcal{E}_M(K_n))$, energi derajat maksimal graf lintasan (path) lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit $(\mathcal{E}_M(P_n) \le \mathcal{E}_M(K_n))$, energi derajat maksimal star lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit $(\mathcal{E}_M(S_{n+1}) \le \mathcal{E}_M(K_{n+1}))$, dan energi derajat maksimal graf reguler $r$ lebih kecil dari energi derajat maksimal graf komplit. Nilai energi derajat maksimal graf $G$ $(\mathcal{E}_M(G))$ bernilai bilangan bulat positif genap.

# DAFTAR PUSTAKA


1. Adika, Chandrashekar. and M. Smita. 2009. On Maximum Degree Energy of a Graph, Int. J. Contemp. Math. Science, vol.4, no.8, hal: 385-396.
2. Anton, Howard. 1987. Aljabar Linear Elementer. Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.
3. Anton, Howard. and Chris Rorres. 2004. Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi. ed. Jakarta: Erlangga.
4. Beezer, Rob. 2009. An Introduction to Algebraic Graph Theory, [pdf], (http://buzzard.ups.edu/talks/beezer-2009-pasific-agt.pdf, diakses tanggal 11 Maret 2012).
5. Pudjiastuti,BSW. 2006. Matriks Teori dan Aplikasi: edisi ke-1. Yogyakarta: Graha Ilmu.
6. Munir, Rinaldi. 2005. Matematika Diskrit: edisi ke-3. Bandung: Informatika.
7. Ngo, Hung Q. 2003. Introduction to Algebraic Graph Theory, [pdf], (www.cse.buffalo.edu/~hungngo/classes/2005/Expanders/notes/AGT-intro.pdf, diakses tanggal 14 Maret 2012).
8. Rosen, Kenneth H. 2007. Discrete Mathematics and Its Application. edisi ke-8. New York: McGraw. Hill.
9. Wilson, Robin J. and John J. Watkins. 1992. Graf Pengantar I, terj. Theresia M. H Tirta. Surabaya: IKIP.
10. SolichinZaki. 2003. Aljabar Linear Elementer. Semarang: universitas Diponegoro.