Penyelesaian Penempatan Kutub Umpan Balik Keluaran dengan Matriks Pseudo Invers

Agung Wicaksono
Program Studi Matematika Jurusan Matematika FSM UNDIP

Onforest212@gmail.com

Abstrak: Metode matriks pseudo invers merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan masalah penempatan kutub umpan balik keluaran. Tujuan penyelesaian masalah penempatan kutub tersebut adalah untuk menstabilkan sistem lup tertutup. Perilaku sistem lup tertutup terlihat dari respon impulsa sistem lup terbuka dengan umpan balik keluaran yang dihasilkan dari matriks pseudo invers.
Kata kunci: Sistem LTI, penempatan kutub.

I. PENDAHULUAN

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dasar memegang peranan yang sangat penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan lain di dunia. Pada paper ini adalah suatu analisis matematika yang di aplikasikan dalam matematika terapan, selanjutnya akan di kembangkan suatu metode dari metode yang telah ada sebelumnya di bidang matematika sistem kontrol modern.

Dalam menurunkan model matematika sistem kontrol modern, akan menemukan persamaan diferensial linier dan nonlinier dengan parameter yang berubah terhadap waktu dan tidak berubah terhadap waktu yang mungkin terlibat cukup rumit karena keanekaragaman masukan dan keluaran. Banyaknya, masukan dan keluaran pada suatu sistem yang kompleks dapat mencapai ratusan. Untuk menyederhanakan bentuk persamaan matematika, sebaiknya digunakan notasi matriks – vektor. Sebenarnya, untuk teoritis, penyederhanaan notasi yang diperoleh dengan menggunakan operasi matriks – vektor, terutama untuk analisis dan sintesis sistem kontrol modern.

Suatu teknik yang sudah pasti dalam pembahasan ini adalah penempatan kutub. Hal ini disebabkan oleh kenyataan bahwa stabilitas dan dinamika perilaku sistem diatur terutama oleh lokasi kutub sistem lup tertutup. Hasil penting pertama dalam penempatan kutub adalah membuktikan bahwa $m-$masukan, $r-$ keluaran pada sistem orde$-n$, $min(n, m+r-1)$ kutub lup tertutup dapat ditetapkan oleh umpan balik keluaran yang disediakan beberapa persyaratan. Prosedur untuk menetapkan kutub

$min(n, mr)$ dengan umpan balik keluaran, yang memungkinkan penempatan kutub selesai untuk orde sistem yang lebih tinggi untuk banyaknya masukan dan keluaran sistem karena $mr > (m + r - 1)$ pada sistem tersebut.

Solusi untuk masalah keluaran penempatan kutub, berlaku bila $mr > n$. Dalam kasus ini, kebebasan dalam memilih matriks umpan balik keluaran. Perkiraan penempatan kutub dinilai ketika penempatan kutub yang tepat tidak mungkin karena, misalnya, kelebihan relatif order sistem terhadap jumlah masukan dan keluaran, yakni ketika $n > mr$. Prosedur yang melibatkan penyelesaian persamaan matriks tertentu diberikan untuk menentukan kutub mendekati ke lokasi dengan terlebih dahulu menentukan vektor nilai eigen $(n - r)$.

Solusi matriks pseudo invers merupakan pendekatan diferensial yang digunakan untuk menemukan umpan balik yang diperlukan untuk penyelesaian masalah umpan balik keluaran. Kemungkinan akan adanya solusi pseudo invers dimanfaatkan untuk mencapai tujuan optimasi. Solusi pseudo invers ini mempunyai beberapa keunggulan, antara lain rumus yang sederhana, menggunakan perkiraan jika kesulitan untuk menyelesaikan dengan tepat.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. MATRIKS PSEUDO INVERS.

Dalam hal ini akan dibahas mengenai nilai eigen dan eigen vektor, nilai singular dan nilai vektor singular serta karakteristik matriks. Hal – hal diatas dapat digunakan untuk menggambarkan besarnya matriks, tetapi mungkin digunakan untuk mengurangi matriks menjadi relatif komponen. Matriks nyata A $m \times n$ dapat ditunjukkan berikut

$$A = USV^T \qquad (1)$$

dimana : Matriks diagonal $m \times n$, mengandung nilai – nilai singular kiri A.

U : Matriks gabungan $m \times m$, mengandung vektor – vektor singular kiri A

V : Matriks gabungan $n \times n$, mengandung vektor – vektor singular kanan A, dan V^T : Tranpose V.

Diberikan matriks $m \times n$, dapat ditemukan matriks persegi B di bawah ini

$$\text{jika } m > n \text{ maka } B = A^T A, \text{ matriks } n \times n \tag{2}$$

atau

$$\text{jika } m > n \text{ maka } B = AA^T, \text{ matriks } m \times m \tag{3}$$

Nilai eigen dari matriks B, dapat dihasilkan dengan menghitung persamaan karakteristik untuk λ, yaitu

$$|B - \lambda I| = 0 \tag{4}$$

Nilai singular A adalah akar positif dari nilai eigen matriks persegi B, yaitu

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{5}$$

Matriks S terbentuk dari relative besarnya m dan n, sebagai berikut

untuk $m > n$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

untuk $m < n$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Kolom dari matriks U merupakan vektor eigen yang dinormalkan dari persamaan (2) atau (3), sedangkan V merupakan vektor eigen yang dinormalkan dari matriks C

$$C = A^T A \tag{8}$$

Sehingga matriks pseudo invers A adalah

$$A^{PI} = VS^{PI}U^T \tag{9}$$

dimana S^{PI} adalah matriks pseudo invers dari S, yang akan menjadi

$$S^{PI} = (S^T S)^{-1} S^T \quad \text{(pseudo invers kiri)} \tag{10}$$

atau

$$S^{PI} = S^T (S S^T)^{-1} \quad \text{(pseudo invers kanan)} \tag{11}$$

Dengan dipilih pseudo invers kanan atau pseudo invers kiri berdasarkan yang terbesar.

2.2. MATRIKS UMPAN BALIK.

Diberikan sistem persamaan ruang keadaan kontinyu berikut

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$$

dimana x adalah vektor keadaan $n \times 1$, u adalah vektor masukan $m \times 1$ dan y adalah vektor keluaran $r \times 1$ dengan $n > \max(m, r)$. Persamaan (12) merupakan sistem lup terbuka dan mempunyai persamaan polinomial karakteristik, berikut

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n \tag{13}$$

dimana $p_0, p_1, \ldots, p_n$ adalah vektor koefisien karakteristik sistem lup terbuka, $p_0 = 1$.

Menetapkan hukum kontrol umpan balik keluaran

$$u = -Ky + v \tag{14}$$

dimana K adalah matriks umpan balik keluaran $m \times r$ dan v adalah vektor perintah $m \times 1$.

Mensubtitusikan persamaan (14) ke persamaan (12) diperoleh sistem lup tertutup, yaitu

$$\dot{x} = Ax + B(-Ky + v)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Bv} \tag{15}$$

Sehingga sistem lup tertutup (15) mempunyai persamaan polinomial karakterisitk berikut

$$q(s) = \det(sI - A + BKC) = s^n + q_1 s^{n-1} + \cdots + q_n \quad (16)$$

dimana $q_0, q_1, \ldots, q_n$ adalah vektor koefisien karakteristik sistem lup tertutup, $q_0 = 1$.

Dari persamaan (16) menunjukkan adannya keterhubungan vektor koefisien karakteristik lup tertutup q_i yang bersesuaian dengan koefisien polinomial karateristik lup terbuka p_i, yaitu

$$q_i = p_i + L_i + \emptyset_i(K) \quad (17)$$

dimana

$$L_i = \left(p_{i-1}CB + p_{i-2}CAB + \cdots + CA^{i-1}B\right)k, \text{ dengan } i = 1, 2, \ldots, n \quad (18)$$

Mensubstitusikan persamaan (18) ke persamaan (17), diperoleh

$$q_i = p_i + (p_{i-1}e_0 + p_{i-2}e_1 + \cdots + e_{i-1})k, \text{ dengan } i = 1, 2, \ldots, n \quad (19)$$

dimana e_i adalah hasil dari matriks $CA^{i-1}B$ yang disusun menjadi matriks baris, sedangkan k adalah matriks K yang ditumpuk menjadi matriks kolom.

Masalah penempatan kutub ini adalah menemukan matriks K $m \times r$, atau menemukan vektor k $mr \times 1$ sedemikian rupa sehingga perubahan koefisien dari nilai awal (vektor koefisien karakteristik lup terbuka) $p = (p_1\ p_2\ \ldots\ \ p_n)^T$ mendekati kenilai akhir (vektor koefisien karakteristik yang diinginkan) $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$ yang dinotasikan sebagai matriks $q_{des} = \frac{1}{T}(d - p)$, dimana T adalah lamanya perpindahan nilai awal p mendekati nilai akhir d.

Perhatikan sistem pada persamaan (15) dengan persamaan polinomial karakteristik pada persamaan (16) sebagai sistem lup terbuka dan menerapkan matriks umpan balik tambahan δK dimana elemen δK, yaitu δk_1, $\delta k_2, \ldots$ δk_{mr} "cukup kecil". Penerapan δK ini menyebabkan perubahan kecil dari koefisien $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ δq_n kedalam koefisien polinomial karakteristik $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Dari persamaan (19), diperoleh

$$q_i + \delta q_i = q_i + (q_{i-1}f_0 + q_{i-2}f_1 + \cdots + f_{i-1})\delta k, \text{ dengan } i = 1, 2, .., n \quad (20)$$

dimana f_i adalah hasil dari matriks $C\hat{A}^i B = C(A - BKC)^{i-1}B$ yang disusun menjadi matriks baris dan δk mengandung fungsi non linier berorde 2 atau lebih menghasilkan elemen pada matrik tambahan. Persamaan (20) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \delta k \tag{21}$$

atau

$$\delta q = Q(k)F(k)\delta k \equiv J(k)\delta k \tag{22}$$

δq adalah vektor $n \times 1$, $Q(k)$ dan $F(k)$ adalah matriks $n \times n$ dan $n \times mr$ dan $J(k) \equiv Q(k)F(k)$ adalah matriks Jacobian $n \times mr$, dan karena struktur tertentu rank $Q(K) = n$.

Matriks tambahan δq ini pada persamaan (22) ini dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial jika membagi kedua sisinya dengan δt, diperoleh

$$\dot{q} = J(k)\dot{k} \tag{23}$$

2.3. MATRIKS UMPAN BALIK DENGAN SOLUSI PSEUDO INVERS.

Persamaan (23) merupakan persamaan differensial yang berhubungan antara vektor polinomial karakteristik ke vektor umpan balik. $\dot{k}$ dapat di temukan dengan metode pseudo invers, yaitu

$$\dot{k} = J^*(k)\,\dot{q}_{des} + \propto (I_{mr} - J^*(k)J(k))h \tag{24}$$

dimana $J^*(k)$ adalah matriks pseudo invers $mr \times n$ dari $J(k)$, q_{des} merupakan vektor polinomial karakteristik lup tertutup yang dinginkan, $\propto$ adalah skalar sebarang, h adalah vektor $mr \times 1$ sebarang dan I_{mr} adalah matriks identitas $mr \times mr$.

Rank matriks Jacobian $J(k)$ menentukan keberadaan dan keakuratan dari solusi persamaan (24). Karena rank $J(k) =$ rank$(Q(k)F(k)) =$ rank $F(k)$, dengan $F(k)$ adalah matrik $n \times mr$ yang terbentuk dari $C\hat{A}^{i-1}B$, yaitu $F = (f_0 \ f_1 \ \ f_2 \ \dots \ f_{n-1})^T$. Karena perubahan vektor koefisien karakteristik dari nilai awal ke nilai akhir, maka nilai matriks umpan balik K juga berubah. Akibatnya, rank matriks Jacobian tergantung pada nilai matriks K.

Misalkan $F(k)$ matriks $n\ x\ mr$ akibatnya $J(k)$ memiliki full rank n untuk semua full rank(K). Dalam hal ini generik rank $F(k)$ dan $J(k)$adalah n dan menulisnya sebagai grank$\left(J(k)\right) =$ grank$F(k) = n$. Grank adalah struktur tertentu rank sebuah matrks dan dapat ditemukan dengan memasukkan matriks umpan balik secara acak ke sistem, dan menghitung rank $F(k)$ yang dihasilkan. Matriks K ini mungkin membuat $F(k)$ atau $J(k)$ kekurangan rank dan mempunyai solusi $det\left(F(k)F^T(k)\right) = 0$. Jika grank $F(k) = n$, maka polinomial hanya terbatas pada titik tertentu, maka $F(k)$ menjadi kekurangan rank. Menerapkan nilai awal matriks umpan balik K_0 secara sebarang ke sistem untuk menghasilkan sistem baru yang kemudian efektif mengubah nilai awal koefisien polinomial vektor p. Sistem baru ini sekarang berbeda kecuali untuk nilai akhir yang merupakan polinomial karakteristik vektor d. Pada akhirnya nilai akhir ini menyebabkan kekurangan rank, itu akan memungkinkan menempatkan kutub secara tepat. Sebaiknya perhatikan untuk skala awal matriks umpan balik K_0 seperti $\|BK_0C\|$ yang mempunyai orde sama seperti $\|A\|$, jadi K_0 tidak melebihi karakteristik sistem atau menyebabkan perubahan yang tidak signifikan. Dalam hal yang istimewa kekurangan rank $J(k)$ disebabkan oleh polinomial karakteristik vektor d, dapat menempatkan satu kutub secara dekat, tetapi belum tepat, pada letak yang diinginkan.

Menentukan matrik umpan balik $\dot{k}$ pada persamaan (24) akan mengalami kesulitan seperti menghitung integrasi karena kecilnya ketidakakuratan dapat menyebabkan ketidakstabilan dari solusi. Untuk menghindari masalah ini didefinisikan koefisien error karakteristik $\varepsilon(t)$, yaitu

$$\varepsilon(t) = q_{des}(t) - q(t) \tag{25}$$

dimana $q_{des}(t)$ adalah koefisien karakteristik yang diinginkan dan karakteristik sebenarnya vektor q(t) merupakan koefisien yang di peroleh dari $\det(sI - A + BKC)$. Sekarang akan diterapkan sebuah perhitungan baru umpan balik, yaitu

$$\dot{k} = J^*(\dot{q}_{des} + G\varepsilon) + \propto (I_{mr} - J^*J)h \tag{26}$$

dimana G adalah perhitungan pasti positif umpan balik matriks $n \times n$ untuk kesederhanaan dapat dipilih dari diagonal matriks dengan elemen – elemen positif. I_{mr} adalah matrik identitas $mr \times mr$. $\propto$ adalah skalar sebarang. Karena pilihan istimewa $\dot{q}_{des}$ terbatas. Persamaan (26), sebagai sistem pendamping yang dinamis. Untuk kesederhanaan notasi J tergantung k pada (26), yakni $J \equiv J(k)$.

Sebelum mengalikan kedua sisi persamaan (26) dengan J dan mulai menggunakan persamaan (23), diketahui persamaan berikut dari penjelasan sebelumnya

$$\dot{q} = JJ^*(\dot{q}_{des} + G\varepsilon) + \propto J(I_{mr} - J^*J)h \qquad (27)$$

Dibentuk turunan $\dot{\varepsilon} = \dot{q}_{des} - \dot{q}$, substitusi $\dot{\varepsilon}$ ke persamaan (25), diperoleh persamaan

$$\dot{\varepsilon} = -JJ^*G\varepsilon + (I_n - J^*J)\dot{q}_{des} - \left(\propto J(I_{mr} - J^*J)\right)h \qquad (28)$$

Dianggap rank $(J) = n$, didapat $JJ^* = I_n$ dan $J(I_{mr} - J^*J) = J - JJ^*J = 0$. Selanjutnya, dipilih $G = gI_n$, dimana g adalah konstanta skalar positif, persamaan (28) dapat disederhanakan

$$\dot{\varepsilon} = -g\varepsilon \qquad (29)$$

Dengan memperhatikan keadaan diatas dan pembahasan sebelumnya mengenai rank matriks Jacobian untuk mencari solusi, dinyatakan teorema berikut.

Teorema 2.1. Perhatikan sistem $m-$masukan, $r-$keluaran pada orde$-n$ yang diberikan pada persamaan (12) dan hukum umpan balik keluaran statis pada persamaan (13). Kemudian memungkinkan menempatkan kutub – kutub $min(n, mr)$ secara tepat atau mendekati letak yang diinginkan dengan ketentuan grank $(J) = n$.

Contoh :

Diberikan berikut ini sistem persamaan ruang keadaan berorde 5, dengan banyaknya masukkan 3 dan keluaran 2.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & -1.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diketahui untuk masing – masing $g = 10$, $\lambda = 1$, $T = 10$, $n = 5$, $m = 3$ dan $r = 2$. Diinginkan menempatkan kutub pada $d = [10.98 \quad 44.86 \quad 84.62 \quad 73.54 \quad 23.8]$

Dengan menggunkan metode matriks pseudo invers diatas tentukan nilai matriks umpan balik keluaran K, kestabilan sistem, dan mengetahui perilaku sistem lup terbuka dan lup tertutup. Dari sini dapat terlihat bahwa kutub (nilai eigen) dari sistem lup tertutup mendekati letak kutub (nilai eigen) yang diinginkan.

III. KESIMPULAN

Penyelesaian penempatan kutub sistem umpan balik keluaran ini dapat ditemukan dengan menggunakan matriks pseudo invers. Untuk mengetahui kestabilan sistem umpan balik ini dapat dikaji melalui nilai eigen dari sistem lup tertutup, yaitu dengan mengamati nilai eigen sistem. Jika bagian real dari nilai eigen tersebut negatif maka sistem stabil.

Metode matriks pseudo invers merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan matriks umpan balik keluaran pada sebuah sistem terkontrol. Dengan metode ini diperoleh kutub (nilai eigen) sistem lup tertutup mendekati letak kutub (nilai eigen) yang diinginkan.

Sistem lup tertutup stabil dimana semua kutub terletak disebelah kiri sumbu s (bagian real dari nilai eigen negatif sesuai yang diinginkan). Nilai eigen yang diinginkan ini dapat diperoleh menggunakan penempatan kutub.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyadari bahwa tanpa dukungan dari berbagai pihak, maka penulis tidak dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik dikarenakan hambatan yang dialami. Kesempatan ini, penulis hendak mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Widowati, S.Si, M.Si selaku Pembantu Dekan II FSM UNDIP, sekaligus selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini.
2. Bapak Drs. Djuwandi, SU selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini.
3. Bapak Drs. Y.D Soemanto, M.Si selaku dosen wali yang telah mengarahkan penulis dari awal tahun kuliah hingga selesainya tugas akhir ini.
4. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FSM UNDIP dimana penulis memperoleh ilmu pengetahuan.
5. Dan semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak mampu penulis sebutkan satu per satu.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1]. K. Mastern, Michael, 1995, *Modern Control Systems*, Institute of Electrical and Electronic Engineers, 445 Hoes Lane, P.O. Box 1331, Piscataway.

[2]. Ogata, K., 1990, *Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan)*, jilid 1. Erlangga, Jakarta.

[3]. Ogata, K., 1997, *Modern Control Engineering*, Third Edition. Prentice Hill.

[4]. Tarokh, M., 2008, *A Unified Approach to Exact, Approximate, Optimized And Decentralized Output Feedback Pole Assignment,* International Journal of Control, Automotion, and Systems, vol. 6, no. 6, pp. 939 – 947.

[5]. Tarokh, M., 1989, *An Approach to Pole Assignment by Centralized and Decentralized Output Feedback*, IEE Proceeding, Part D, vol. 136, no. 2, pp. 89 – 97.