GENERALISASI TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK LENGKAP

Nur Hamid

Jurusan Matematika, F. MIPA, Universitas Brawijaya
Email:nur_hamid@ymail.com

Abstrak. Teorema titik tetap Banach memiliki beberapa beberapa generalisasi, di antaranya yang diperkenalkan oleh T. Suzuki (2007) dan Meir-Keeler. Dalam artikel ini, dibahas beberapa generalisasi teorema titik Banach pada ruang metrik yang lengkap.

Kata kunci: barisan, titik tetap, Cauchy, lengkap, konvergen.

1. PENDAHULUAN

Teorema titik tetap Banach mengalami berbagai macam generalisasi. Salah satu upaya generalisasi adalah generalisasi yang diperkenalkan oleh Meir dan Keeler pada tahun 1969. Meir Keeler memerperluas pemetaan kontraktif menjadi pemetaan kontraktif murni seragam lemah. Selanjutnya, T. Suzuki juga melakukan sebuah upaya generalisi pada tahun 2007.

Pada artikel ini, akan dibahas generalisasi teorema titik tetap Banach pada ruang metrik yang lengkap. Generalisasi yang dibahas adalah generalisasi yang dilakukan oleh T. Suzuki (2007) dan Meir-Keeler (1969).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1. *Misalkan* (X,d) *adalah ruang metrik lengkap dan misalkan* $T: X \to X$ *pemetaan pada X. Didefinisikan sebuah fungsi tak naik dari* $[0,1)$ *ke* $(\frac{1}{2},1]$ *dengan*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & jika\ 0 \le r \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (1-r)r^{-2}, & jika\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \le r \le 2^{-\frac{1}{2}} \\ (1+r)^{-1}, & jika\ 2^{-\frac{1}{2}} \le r < 1. \end{cases}$$

Jika terdapat $r \in [0,1)$ *sedemikian sehingga*

$$\theta(r)d(x,Ty) \le d(x,y) \Longrightarrow d(Tx,Ty) \le r\, d(x,y) \tag{1}$$

untuk setiap $x, y \in X$, *maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal.*

Bukti: Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa setiap barisan yang dibangun oleh T konvergen. Karena $\theta(r) \le 1$, maka $\theta(r)d(x,Tx) \le d(x,Tx)$ untuk setiap $x \in X$. Berdasarkan (1), diperoleh

$$d(Tx,T^2x) \le rd(x,Tx) \tag{2}$$

untuk setiap $x \in X$. Diambil $x_0 \in X$ dan dimisalkan $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$, demikian seterusnya. Sehingga diperoleh suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X dengan $x_n = T^n x_0$. Lebih lanjut, akan ditunjukkan bahwa $\langle u_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy. Dari (2), diperoleh

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\le rd(x_0,Tx_0) = rd(x_0,x_1), \\ d(x_2,x_3) &\le d(Tx_1,Tx_2) \le r^2 d(x_0,x_1), \\ &\vdots \\ d(x_n,x_{n+1}) &\le r^n d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < \frac{\ln \dfrac{\varepsilon}{kd(x_0,x_1)}}{\ln r}.$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ Cauchy. Oleh karena itu, $\langle u_n \rangle$ konvergen ke suatu titik $z \in X$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$d(Tx_0, z) \leq rd(x_0, z) \text{ untuk setiap } x_0 \in X \backslash \{z\}. \tag{3}$$

Untuk setiap $x_0 \in X \backslash \{z\}$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, z) \leq d(x_0, z)/3$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq v$. Maka

$$\begin{aligned} \theta(r)d(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq d(x_n, z) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \frac{2}{3}d(x_0, z) = d(x_0, z) - \frac{d(x_0, z)}{3} \\ &\leq d(x_0, z) - d(x_n, z) \leq d(x_n, x). \end{aligned}$$

Oleh karena itu dan dari (1), maka $d(u_{n+1}, Tu_0) \leq rd(u_n, u_0)$ untuk setiap $n \geq N$. Dengan $n \to \infty$, didapatkan $d(Tu_0, z) \leq rd(u_0, z)$. Bentuk (2) telah terbukti. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk ketiga kondisi pada θ, terdapat $j \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $T^j z = z$. Bukti ini akan diberikan dengan metode kontradiksi. Diandaikan $T^j z \neq z$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$. Dari (2), diperoleh

$$d\left(T^{j+1}z, z\right) \leq r^j d(Tz, z) \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Untuk membuktikan teorema, akan dibagi menjadi 3 kasus.

1. $0 \leq r \leq (\sqrt{5} - 1)/2$

Pada kasus ini, berlaku $r^2 + r \leq 1$. Dengan mensubstitusikan r pada θ, diperolah $\theta(r) = 1$ untuk setiap r pada kasus 1. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $d(T^2z, T^3z) \leq d(T^2z, z)$. Bukti akan ditunjukkan dengan cara kontradiksi.

Diandaikan $d(T^2z, z) < d(T^2z, T^3z)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, T^2z) + d(Tz, T^2z) \\ &< d(T^2z, T^3z) + d(Tz, T^2z) \\ &\leq r^2 d(z, Tz) + rd(z, Tz) \\ &\leq d(z, Tz). \end{aligned}$$

Ketaksamaan di atas kontradiksi, karena seharusnya $d(z, Tz) = d(z, Tz)$. Artinya, pengandaian salah. Maka diperoleh

$$d(T^2z, z) \geq d(T^2z, T^3z) = \theta(r)d(T^2z, T^3z).$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $Tz = z$. Dari (1) dan (3), diperoleh

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, T^3z) + d(T^3z, Tz) \\ &\leq r^2 d(z, Tz) + r^2 d(Tz, z) = 2r^2 d(z, Tz) \\ &< d(z, Tz). \end{aligned}$$

Ketaksamaan di atas kontradiksi, maka diperoleh $Tz = z$.

2. $(\sqrt{5} - 1)/2 < r < 1/\sqrt{2}$

Pada kasus ini, berlaku $2r^2 < 1$. Dengan mensubstitusikan r pada θ, diperoleh $\theta(r) < 2 - \sqrt{2} < 1$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\theta(r)d(T^2z, T^3z) \leq d(T^2z, z)$. Serupa dengan kasus 1, dapat ditunjukkan bahwa

$$d(z, Tz) \leq 2r^2 d(z, Tz) < d(z, Tz).$$

Ketaksamaan di atas kontradiksi, maka diperoleh $Tz = z$.

3. $1/\sqrt{2} \leq r < 1$

Pada kasus ini, dapat ditemukan bahwa untuk setiap $x, y \in X$, ketaksamaan

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y)$$

atau

$$\theta(r)d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, y)$$

berlaku. Jika

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \text{ dan } \theta(r)d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, y)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, y) + d(Tx, y) \\ &< \theta(r)\left(d(x, Tx) + d(Tx, T^2x)\right) \\ &\leq \theta(r)\left(d(x, Tx) + rd(x, Tx)\right) = d(x, Tx). \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi. Karena

$$\theta(r)d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, z) \text{ atau } \theta(r)d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, z)$$

berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka, berdasarkan (1), diperoleh

$$d(u_{2n+1}, Tz) \leq rd(u_{2n}, z) \tag{5}$$

atau

$$d(u_{2n+2}, Tz) \leq rd(u_{2n+1}, z) \tag{6}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\langle x_n \rangle$ konvergen ke z, ketaksamaan (4) dan (5) mengimplikasikan bahwa terdapat sub-barisan dari barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke Tz. Maka, dapat diperoleh $Tz = z$. Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa z merupakan titik tetap yang tunggal. ■

Lemma 1. *Dimisalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap. Jika $T: X \rightarrow X$ merupakan kontraksi strict dan untuk setiap $x \in X$, barisan $\langle T^n x \rangle$ merupakan barisan Cauchy, maka T memiliki titik tetap x^* yang tunggal dan berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*. \tag{7}$$

Bukti: Karena X lengkap, setiap $\langle T^n x \rangle$ memiliki titik limit x^*. Karena T kontinu, maka

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^n x\right) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x^*.$$

Oleh karena itu, x^* adalah titik tetap. Diandaikan x^* dan y^* merupakan titik tetap. Akan ditunjukkan bahwa $x^* = y^*$. Karena x^* dan y^* merupakan titik tetap, maka berlaku

$$d(T^n x, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

jika $n \geq N_1$ dan

$$d(T^n x, y^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

jika $n \geq N_2$. Dipilih $N = maks(N_1, N_2)$. Maka

$$d(x^*, y^*) \leq d(x^*, T^n x) + d(T^n x, y^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Oleh karena $d(x^*, y^*) < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $d(x^*, y^*) = 0$. Jadi, $x^* = y^*$. ■

Lemma 2. *Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehigga*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon, \tag{8}$$

maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Bukti: Untuk membuktikan lemma 2, digunakan kontradiksi. Dimisalkan $c_n = d(x_n, x_{n+1})$. Dari kondisi (8), diperoleh

$$d(x_n, x_{n-1}) < d(x_{n-1}, x_{n-2}) < \cdots < d(x_1, x_2).$$

Sehingga $c_n < c_{n-1} < \cdots < c_1$ yang menunjukkan bahwa c_n turun.
Diandaikan $\lim_{n\to\infty} c_n = \varepsilon > 0$. Maka, dari (8) dan dengan memilih $c_m < \varepsilon + \delta$ diperoleh

$$c_{m+1} = d(x_m, x_{m+1}) < \varepsilon.$$

Hal ini bertentangan dengan pengandaian, sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{m+1}) = 0.$$ ■

Teorema 2. *Dimisalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap dan T merupakan pemetaan dari X ke X. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon,$$

maka T memiliki titik tetap yang tunggal.

Kondisi (8) merupakan sebuah kondisi yang dinamakan *weakly uniformly strict condition.*

Bukti: Dari kondisi (8), terlihat bahwa T merupakan pemetaan yang kontinu. Dengan kata lain, jika $x \neq y$, maka

$$d(Tx, Ty) < \varepsilon \leq d(x, y).$$

Pemetaan T kontinu dan memiliki titik tetap. Dengan lemma 1, teorema 2 akan terbukti jika kondisi (8) mengimplikasikan bahwa setiap barisan $\langle T^n x \rangle = \langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy. Diandaikan bahwa barisan yang didefinisikan bukan barisan Cauchy. Maka terdapat $2\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} \sup d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$. Dengan (7), maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\varepsilon \leq \rho(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon. \tag{9}$$

Kemudian diambil δ' dengan $\delta' = \min(\delta, \varepsilon)$. Dari lemma 2, dapat ditemukan M sedemikian sehingga $c_M < \frac{\delta'}{3}$. Diambil $m, n > M$. Karena diandaikan barisan bukan barisan Cauchy, maka $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$. Untuk setiap $j \in [m, n]$, berlaku

$$\left|d(x_m, x_j) - d(x_j, x_n)\right| \leq c_j < \frac{\delta'}{3}.$$

Karena $d(x_m, x_{m+1}) < \varepsilon$ dan $d(x_m, x_n) > \varepsilon + \delta$, maka terdapat $j \in [m, n]$ dengan

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_j) < \varepsilon + \delta'. \tag{10}$$

Kemudian untuk setiap m dan j berlaku

$$\rho(x_m, x_j) \leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{j+1}) + \rho(x_{j+1}, x_j).$$

Dengan menggunakan (3.9) dan (3.10), diperoleh

$$d(x_m, x_j) \leq c_m + \varepsilon + c_j < \frac{\delta'}{3} + \varepsilon + \frac{\delta'}{3} = \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}$$

yang kontradiksi dengan kondisi (3.10). Kontradiksi ini membuktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy. Ruang metrik (X, d) lengkap, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen ke suatu titik $x^* \in X$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 1, dapat diperoleh bahwa x^* merupakan titik tetap yang tunggal. ■

3. KESIMPULAN

Agar suatu pemetaan pada ruang metrik yang lengkap memiliki titik tetap yang tunggal, syarat cukup yang dapat dipenuhi oleh pemetaan tersebut adalah adalah suatu konstanta yang memenuhi kondisi (1). Syarat lain yang dapat dipenuhi adalah *Weakly Uniformly Strict Condition.*

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Disampaikan terima kasih kepada Bapak M. Muslikh, Bapak Abdul Rouf A., dan Ibu Sa'adatul Fitri yang telah memberi banyak masukan demi kelancaran artikel ini. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada teman-teman Matematika dan Lingkar Studi Matematika UB.

DAFTAR PUSTAKA

Keeler, E. dan Meir, A., (1969), A Theorem on Contraction Mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28, hal. 326-329.

Khamsi, M. A. dan Kirk, W. A., (2001), *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Willey and Sons, Inc., Kanada.

Suzuki, Tomonari, (2007), A Generalized Banach Contraction Principle that Characterizes Metric Completeness, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136, hal. 1861-1869.