

## PELABELAN SUPER GRACEFUL UNTUK BEBERAPA GRAF KHUSUS

<sup>1</sup>Primas Tri Anjar Anjani, <sup>2</sup>Robertus Heri SU, <sup>3</sup>Bayu Surarso  
<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika Universitas Diponegoro  
 Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 54275

**Abstract:** Given a graph  $G=(V,E)$ , super graceful labeling is bijective function  $f:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,3,\dots,p+q\}$  such that  $f(uv)=|f(u)-f(v)|$  for every edge  $uv\in E(G)$ . A graph  $G$  that has a super graceful labeling called a super graceful graph. In this final paper discuss about super graceful labeling for special graphs graph  $P_n$ , graph  $P_m(n)$ , graph  $P_n^+ - e_1$ , graph  $C_n$  ( $n \geq 3$ ) graph  $P_n(1,2,\dots,n)$ , graph  $K_{m,n}$ , and graph *Coconut tree*.

**Keywords:** Graph labeling, super graceful labeling, super graceful graph.

### I. Pendahuluan

Graf merupakan salah satu cabang matematika yang berkembang pesat saat ini. Banyak penemuan-penemuan baru tentang graf seperti berbagai macam graf, macam-macam pelabelan graf dan cara melabelkannya. Pelabelan graf pertama kali dikenalkan oleh A.Kotsig dan Rosa (1967). Pelabelan pada graf  $G$  adalah pemberian nilai vertex dan edge pada graf  $G$ .

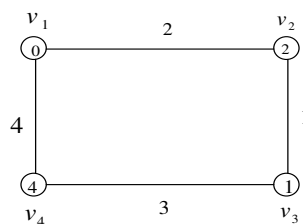
Ada banyak pelabelan yang telah dikembangkan, diantaranya pelabelan *super graceful*. Pelabelan *super graceful* merupakan pemetaan bijektif  $f:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,3,4,\dots,p+q\}$  sedemikian sehingga  $f(uv)=|f(u)-f(v)|$ , untuk setiap sisi  $uv\in E(G)$ . Sebuah graf  $G$  disebut graf *super graceful* jika merupakan pelabelan *super graceful*.

### II. Pembahasan

#### Definisi 2.1 [8]

Pelabelan *graceful* dari graf  $G=(V,E)$  adalah pemetaan injektif  $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,3,\dots,q\}$ ,  $q=|E(G)|$  sedemikian sehingga  $f(uv)=|f(u)-f(v)|$ , untuk setiap  $uv\in E(G)$  sehingga label sisi yang dihasilkan berbeda.

#### Contoh 2.1

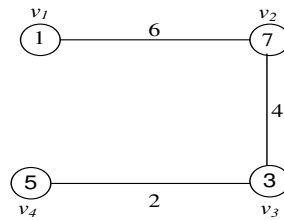


**Gambar 3.1** Graf *graceful*

**Definisi 2.2 [8]**

Pelabelan *super graceful* dari graf  $G$  adalah pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  sedemikian sehingga  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ , untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ . Sebuah graf  $G$  yang memiliki pelabelan *super graceful* disebut graf *super graceful*.

**Contoh 2.2**



**Gambar 3.2** Graf *super graceful*

**Teorema 2.3 [8]**

Graf  $P_n$  adalah graf *super graceful*.

**Bukti:**

Misal  $P_n = v_1 v_2 v_3 \dots v_n$  path dengan panjang  $n-1$ , dengan  $|V(P_n)| = n$  dan  $|E(P_n)| = n-1$ .

Pelabelan titik untuk graf  $P_n (n \geq 1)$  didefinisikan dengan:

$$f(v_j) = \begin{cases} j-1, & 1 \leq j \leq n, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 2n-j, & 1 \leq j \leq n, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Pembuktian bahwa graf  $P_n$  adalah graf *super graceful*, akan dibagi menjadi dua kasus.

**Kasus 1,  $n$  adalah bilangan ganjil.**

Himpunan label titik pada graf  $P_n$ , adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{j-1\} = \{1, 3, 5, \dots, n-2\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^n \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^n \{2n-j\} = \{2n-1, 2n-3, \dots, n\}$$

Himpunan label sisi pada graf  $P_n$ , adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{|2(n-j)|\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{2(n-2), 2(n-4), 2(n-6), \dots, 2\} \\
E_2 &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{|2(n-j)|\} \\
&= \{2(n-1), 2(n-3), 2(n-5), \dots, 4\}
\end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan ganjil,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\} = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_n$  merupakan graf *super graceful*.

**Kasus 2,**  $n$  adalah bilangan genap

Himpunan label titik pada graf  $P_n$ , adalah:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^n \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^n \{j-1\} = \{1, 3, 5, \dots, n-1\} \\
V_2 &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{2n-j\} = \{2n-1, 2n-3, \dots, n+1\}
\end{aligned}$$

Himpunan label sisi pada graf  $P_n$ , adalah:

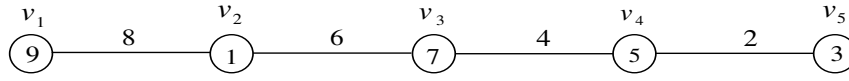
$$\begin{aligned}
E_1 &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{|2(n-j)|\} \\
&= \{2(n-2), 2(n-4), 2(n-6), \dots, 4\} \\
E_2 &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{|2(n-j)|\} \\
&= \{2(n-1), 2(n-3), 2(n-5), \dots, 2\}
\end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan genap,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\} = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_n (n \geq 1)$  merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf  $P_n$  adalah graf *super graceful*.

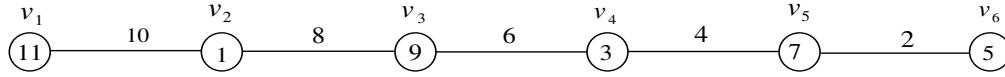
### Contoh 2.3

a) Graf  $P_5$  adalah graf *super graceful*.



**Gambar 3.3** Graf  $P_5$

b) Graf  $P_6$  adalah graf *super graceful*.



**Gambar 3.4** Graf  $P_6$

**Teorema 2.4 [8]**

Graf  $P_m(n)$  adalah graf *super graceful* untuk  $m \geq 1$  dan  $n \geq 1$ .

**Bukti:**

Misal  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$  adalah titik dari path  $P_m$  dan  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n}$  adalah titik yang menggantung pada setiap  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Dengan  $|V(P_m(n))| = m(n+1)$  dan  $|E(P_m(n))| = m(n+1) - 1$ .

Pelabelan titik untuk path  $P_m(n)$  didefinisikan dengan:

$$f(v_i) = \begin{cases} (n+1)i - 1, & 1 \leq i \leq m, i \equiv 0 \pmod{2} \\ (n+1)(2m+1-i) - 1, & 1 \leq i \leq m, i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Pelabelan titik untuk titik-titik yang menggantung pada setiap  $v_i$  didefinisikan dengan:

Untuk  $1 \leq i \leq m$  dan  $i \equiv 0 \pmod{2}$ ,

$$f(u_{i,j}) = (n+1)(2m+2-i) - (2j+1), 1 \leq j \leq n \text{ dan}$$

Untuk  $1 \leq i \leq m$  dan  $i \equiv 1 \pmod{2}$ ,

$$f(u_{i,j}) = (n+1)(i-1) + 2j - 1, 1 \leq j \leq n.$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf  $P_m(n)$ , adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \{(n+1)i - 1\}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{2n+1, 4n+3, \dots, m(n+1) - 1\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{2n+1, 4n+3, \dots, (m-1)(n+1) - 1\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \{(n+1)(2m+1-i) - 1\}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{(n+1)2m-1, (n+1)(2m-2) - 1, \dots, (n+1)(m+2) - 1\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{(n+1)2m-1, (n+1)(2m-2)-1, \dots, (n+1)(m+1)-1\}$$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \left( \bigcup_{j=1}^n \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \left( \bigcup_{j=1}^n \{(n+1)(2m+2-i) - (2j+1)\} \right)$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{(n+1)(2m)-3, (n+1)(2m)-5, \dots, (n+1)(2m)-(2n+1)\}$$

$$\cup \{(n+1)(2m-2)-3, \dots, (n+1)(2m-2)-(2n+10)\}$$

$$\cup \dots \cup \{(n+1)(m+2)-3, \dots, (n+1)(m+2)-(2n+1)\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{(n+1)(2m)-3, (n+1)(2m)-5, \dots, (n+1)(2m)-(2n+1)\}$$

$$\cup \{(n+1)(2m-2)-3, \dots, (n+1)(2m-2)-(2n+10)\}$$

$$\cup \dots \cup \{(n+1)(m+2)-3, \dots, (n+1)(m+1)-(2n+1)\}$$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \left( \bigcup_{j=1}^n \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \left( \bigcup_{j=1}^n \{(n+1)(i-1) + 2j - 1\} \right)$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \cup \{2(n+1)+1, 2(n+1)-3, \dots, 2(n+1)-2n-1\}$$

$$\cup \dots \cup \{(n+1)(m-2)+1, \dots, (n+1)(m-2)+2n-1\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \cup \{2(n+1)+1, 2(n+1)-3, \dots, 2(n+1)-2n-1\}$$

$$\cup \dots \cup \{(n+1)(m-1)+1, \dots, (n+1)(m-1)+2n-1\}$$

Himpunan label sisi pada graf  $P_m(n)$ , adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{m-2} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{m-2} \{|(n+1)i-1 - ((n+1)(2m+1-i)-1)|\}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{2(n+1)(m-2), 2(n+1)(m-4), 2(n+1)(m-6), \dots, 4(n+1)\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{2(n+1)(m-2), 2(n+1)(m-4), 2(n+1)(m-6), \dots, 2(n+1)\}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \{f(v_i v_{i+1})\} \\
&= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \{|((n+1)(2m+1-i) - 1) - ((n+1)(i+1) - 1)|\}
\end{aligned}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{2(n+1)(m-1), 2(n+1)(m-3), \dots, 2(n+1)\}$$

Untuk  $m$  ganji diperoleh

$$= \{2(n+1)(m-1), 2(n+1)(m-3), \dots, 4(n+1)\}$$

$$\begin{aligned}
E_3 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \left( \bigcup_{j=1}^n \{f(v_i u_{i,j})\} \right) \\
&= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^m \{2((n+1)(m-i-1) - 1), \dots, 2((n+1)(m-i-1) - n)\}
\end{aligned}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{2((n+1)(m+1) - 1), 2((n+1)(m+1) - 2), \dots, 2((n+1)(m+1) - n)\} \cup \dots \cup \{2((n+1) - 1), 2((n+1) - 2), \dots, 2\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

$$= \{2(n+1)(m+1) - 1, 2((n+1)(m+1) - 2), \dots, 2((n+1)(m+1) - n)\} \cup \dots \cup \{2(2(n+1) - 1), \dots, 2n+4\}$$

$$\begin{aligned}
E_4 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \left( \bigcup_{j=1}^n \{f(v_i u_{i,j})\} \right) \\
&= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{m-1} \left( \bigcup_{j=1}^n \{|(n+1)(2m+1-i) - 1 - ((n+1)(i-1) + 2j - 1)|\} \right)
\end{aligned}$$

Untuk  $m$  genap diperoleh

$$= \{2((n+1)m - 1), 2((n+1)m - 2), \dots, 2((n+1)m - n)\} \cup \{2((n+1)(m-2) - 1), \dots, 2((n+1)(m-2) - n)\} \cup \dots \cup \{2(2(n+1) - 1), 2(2(n+1) - 2), \dots, 2n+4\}$$

Untuk  $m$  ganjil diperoleh

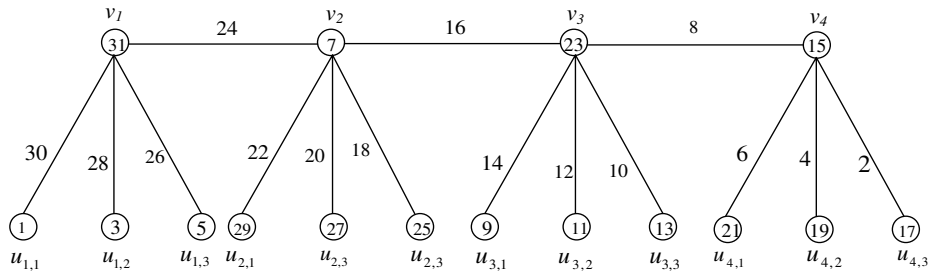
$$= \{2((n+1)m - 1), 2((n+1)m - 2), \dots, 2((n+1)m - n)\} \cup \{2((n+1)(m-2) - 1), \dots, 2((n+1)(m-2) - n)\} \cup \dots \cup \{2((n+1) - 1), 2((n+1) - 2), \dots, 2\}$$

Terbukti untuk  $m$  bilangan genap dan ganjil,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\} = \{1, 2, 3, \dots, (n+1)2m-1\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_m(n)$  merupakan graf *super graceful*. ■

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf  $P_m(n)$  adalah graf *super graceful*.

**Contoh 2.4**

Graf  $P_4(3)$  adalah graf *super graceful*.



**Gambar 3.5** Graf  $P_4(3)$

**Teorema 2.5 [8]**

Graf  $P_n^+ - e_1$  dimana  $e_1 = v_1u_1$  adalah *super graceful* untuk  $n \geq 1$ .

**Bukti:**

Misal  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  adalah titik dari *path* dengan panjang  $n-1$  dan  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  incident berturut-turut dengan titik  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Dengan  $|V(P_n^+ - e_1)| = 2n-1$  dan  $|E(P_n^+ - e_1)| = 2n-2$ .

Pembuktian bahwa graf  $P_n^+ - e_1$  adalah graf *super graceful* dibagi menjadi dua kasus.

**Kasus 1, n adalah bilangan ganjil**

Pelabelan titik untuk graf  $P_n^+ - e_1$  definisikan dengan:

$$f(u_n) = 1 \text{ dan } f(v_n) = 4n - 3$$

$$f(v_i) = \begin{cases} n + 2 - i, & 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 3n - 3 + i, & 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} n + i, & 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ 3n - 1 - i, & 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf  $P_n^+ - e_1$ , adalah:

$$V_1 = f(u_n) = \{1\} \text{ dan } V_2 = f(v_n) = \{4n - 3\}$$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}^{n-1}} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}^{n-1}} \{n + 2 - i\} = \{n, n - 2, n - 4, \dots, 3\}$$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}^{n-1}} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}^{n-1}} \{3n - 3 + i\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{3n - 2, 3n, 3n + 2, \dots, 4n - 5\} \\
V_5 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{n + i\} \\
&= \{n + 2, n + 4, n + 6, \dots, 2n - 1\} \\
V_6 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{3n - 1 - i\} \\
&= \{3n - 4, 3n - 6, \dots, 2n + 1\}
\end{aligned}$$

Himpunan label sisi pada graf  $P_n^+ - e_1$ , adalah:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{2(n + i - 2)\} \\
&= \{2n, 2n + 4, \dots, 4n - 6\} \\
E_2 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{2(n + i - 2)\} \\
&= \{2n - 2, 2n + 4, 2n + 6, \dots, 4n - 8\} \\
E_3 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{2i - 2\} \\
&= \{2, 6, \dots, 2n - 4\} \\
E_4 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{2i - 2\} \\
&= \{4, 8, \dots, 2n - 6\} \\
E_5 &= \{f(u_n v_n)\} = \{-4n + 4\} = \{4n - 4\}
\end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan ganjil,  $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\} = \{1, 2, \dots, 4n - 3\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_n^+ - e_1$  merupakan graf *super graceful*.

**Kasus 2**,  $n$  adalah bilangan genap

Pelabelan titik untuk graf  $P_n^+ - e_1$  definisikan:

$$\begin{aligned}
f(u_n) &= 1 \text{ dan } f(v_n) = 4n - 3 \\
f(v_i) &= \begin{cases} 3n - 3 + i, & 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0 \pmod{2} \\ n + 2 - i, & 1 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}
\end{aligned}$$



$$f(u_i) = \begin{cases} 3n - 1 - i, & 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 0(\text{mod } 2) \\ n + i, & 2 \leq i \leq n - 1, i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf  $P_n^+ - e_1$ , adalah:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= f(u_n) = \{1\} \text{ dan } \dot{V}_2 = f(v_n) = \{4n - 3\} \\ \dot{V}_3 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{3n - 3 + i\} \\ &= \{3n - 1, 3n + 1, 3n + 3, \dots, 4n - 5\} \\ \dot{V}_4 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{n + 2 - i\} \\ &= \{n + 1, n - 1, n - 3, \dots, 3\} \\ \dot{V}_5 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{3n - 1 - i\} \\ &= \{3n - 3, 3n - 7, \dots, 2n + 1\} \\ \dot{V}_6 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{f(u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{n + i\} \\ &= \{n + 3, n + 5, \dots, 2n - 1\} \end{aligned}$$

Himpunan label sisi pada graf  $P_n^+ - e_1$ , adalah:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{2n + 2i - 4\} \\ &= \{2n, 2n + 4, \dots, 4n - 8\} \\ \dot{E}_2 &= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{n-1} \{2(n + i - 2)\} \\ &= \{2n - 2, 2n + 2, \dots, 4n - 6\} \\ \dot{E}_3 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{f(v_i u_i)\} \\ &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{n-2} \{2i - 2\} \\ &= \{2, 6, 10, \dots, 2n - 6\} \end{aligned}$$

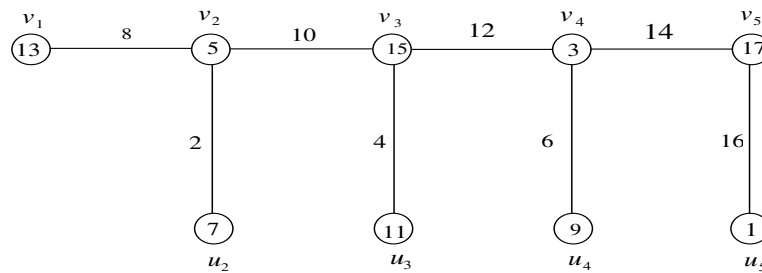
$$\begin{aligned} \dot{E}_4 &= \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_i u_i)\} = \bigcup_{\substack{i=2 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-1} \{2i - 2\} \\ &= \{4, 8, \dots, 2n - 4\} \\ \dot{E}_5 &= \{f(u_n v_n)\} = \{|f(u_n) - f(v_n)|\} = \{4n - 4\} \end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan genap,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\} = \{1, 2, \dots, 4n-3\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_n^+ - e_1$  merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, dapat dilihat bahwa semua himpunan label titik memuat nilai ganjil dan semua himpunan label sisi memuat nilai genap. Terbukti, graf  $P_n^+ - e_1$  adalah graf *super graceful*.

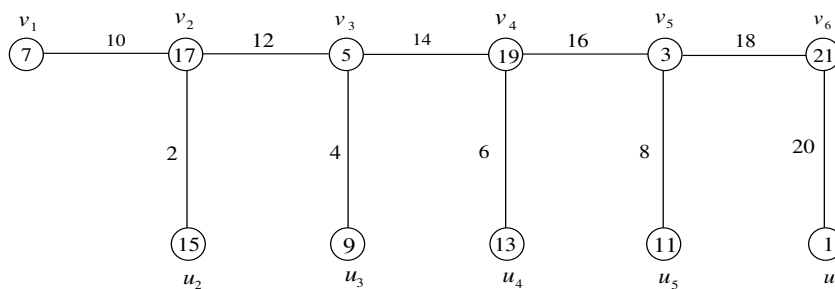
### Contoh 2.5

a) Graf  $P_5^+ - e_1$  adalah *super graceful*.



Gambar 3.6 Graf  $P_5^+ - e_1$

b) Graf  $P_6^+ - e_1$  adalah *super graceful*.



Gambar 3.7 Graf  $P_6^+ - e_1$

### Teorema 2.6 [8]

Setiap graf siklus  $C_n$  adalah graf *super graceful*.

**Bukti:**

Misal  $V(C_n) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ , dengan  $|V(C_n)| = n$  dan  $|E(C_n)| = n$ . Pembuktian bahwa siklus  $C_n$  adalah graf *super graceful*, akan dibagi menjadi dua kasus.

**Kasus 1**,  $n$  adalah ganjil, yaitu  $n = 2m + 1$  untuk  $m \geq 1$ .

Pelabelan titik untuk graf siklus  $C_n$  definisikan dengan:

$$\begin{aligned} f(u_{2i-1}) &= 2i - 1, 1 \leq i \leq m \\ f(u_{2i}) &= 4m + 1 - 2i, 1 \leq i \leq m - 1 \\ f(u_{2m}) &= 4m \text{ dan} \\ f(u_{2m+1}) &= 4m + 2 \end{aligned}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada siklus  $C_n$ , adalah:

$$\begin{aligned} V_1 &= \bigcup_{i=1}^m \{f(u_{2i-1})\} = \bigcup_{i=1}^m \{2i - 1\} = \{1, 3, 5, \dots, 2m - 1\} \\ V_2 &= \bigcup_{i=1}^{m-1} \{f(u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{4m + 1 - 2i\} = \{4m - 1, 4m - 3, \dots, 2m + 3\} \\ V_3 &= \{f(u_{2m})\} = \{4m\} \\ V_4 &= \{f(u_{2m+1})\} = \{4m + 2\} \end{aligned}$$

Himpunan label sisi pada siklus  $C_n$ , adalah:

$$\begin{aligned} E_1 &= \bigcup_{i=1}^{m-2} \{f(u_{2i-1}u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-2} \{4m - 4i - 2\} \\ &= \{4m - 2, 4m - 6, 4m - 10, \dots, 6\} \\ E_2 &= \bigcup_{i=1}^{m-1} \{f(u_{2i}u_{2i+1})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{4(m - i)\} \\ &= \{4(m - 1), 4(m - 2), \dots, 4\} \\ E_3 &= \{f(u_{2m-1}u_{2m})\} = \{|(2m - 1) - 4m|\} = \{2m + 1\} \\ E_4 &= \{f(u_{2m}u_{2m+1})\} = \{|4m - (4m + 2)|\} = \{2\} \\ E_5 &= \{f(u_{2m+1}u_1)\} = \{|(4m + 2) - 1|\} = \{4m + 1\} \end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan ganjil,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\} = \{1, 2, \dots, 4m + 2\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $C_n$  merupakan graf *super graceful*

**Kasus 2**,  $n$  adalah bilangan genap, yaitu  $n = 2m$  untuk  $m \geq 2$

Pelabelan titik untuk graf sikel  $C_n$  definisikan dengan:

$$\begin{aligned} f(u_{2i-1}) &= 2i - 1, 1 \leq i \leq m \\ f(u_{2i}) &= 4m - 1 - 2i, 1 \leq i \leq m - 1 \\ f(u_{2m}) &= 2 \text{ dan} \\ f(u_{2m+1}) &= 4m \end{aligned}$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada sikel  $C_n$ , adalah:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bigcup_{i=1}^{m-1} \{f(u_{2i-1})\} = \bigcup_{i=1}^m \{2i - 1\} = \{1, 3, 5, \dots, 2m - 3\} \\ \dot{V}_2 &= \bigcup_{i=1}^{m-1} \{f(u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{4m - 1 - 2i\} \\ &= \{4m - 3, 4m - 5, \dots, 2m + 1\} \\ \dot{V}_3 &= \{f(u_{2m-1})\} = \{2\} \\ \dot{V}_4 &= \{f(u_{2m})\} = \{4m\} \end{aligned}$$

Himpunan label sisi pada sikel  $C_n$ , adalah:

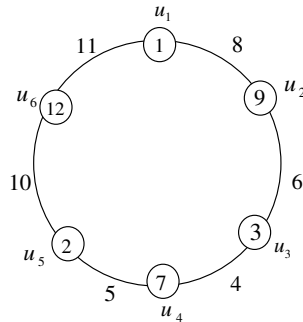
$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \bigcup_{i=1}^{m-1} \{f(u_{2i-1}u_{2i})\} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{4(m - i)\} \\ &= \{4(m - 1), 4(m - 2), \dots, 4\} \\ \dot{E}_2 &= \bigcup_{i=1}^{m-2} \{f(u_{2i}u_{2i+1})\} = \bigcup_{i=1}^{m-2} \{|(4m - 1 - 2i) - (2i + 1)|\} \\ &= \{4m - 6, 4m - 10, \dots, 6\} \\ \dot{E}_3 &= \{f(u_{2m-2}u_{2m-1})\} = \{|f(u_{2m-2}) - f(u_{2m-1})|\} \\ &= \{|(2m + 1) - 2|\} \\ &= \{2m - 1\} \\ \dot{E}_4 &= \{f(u_{2m-1}u_{2m})\} = \{|f(u_{2m-1}) - f(u_{2m})|\} = \{4m - 2\} \\ \dot{E}_5 &= \{f(u_{2m}u_1)\} = \{|f(u_{2m}) - f(u_1)|\} = \{4m - 1\} \end{aligned}$$

Terbukti untuk  $n$  bilangan genap,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\} = \{1, 2, \dots, 4m\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $C_n$  merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan label titik dan semua label sisi berbeda. Terbukti, graf sikel  $C_n$  adalah graf *super graceful*.

### Contoh 2.6

Graf  $C_6$  adalah *super graceful*.



**Gambar 3.8** Graf  $C_6$

**Teorema 2.7** [7]

Graf  $P_n(1,2,\dots,n)$  adalah graf super graceful untuk  $n \geq 1$ .

**Bukti:**

Misal  $G = P_n(1,2,\dots,n)$ , dengan  $|V(G)| = n + \frac{n(n+1)}{2}$  dan

$$|E(G)| = (n-1) + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pelabelan titik untuk graf  $G$  didefinisikan dengan:

$$f(v_i) = \begin{cases} n^2 + 3n + 1 - \frac{1}{2}(i+1)^2, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 2) \\ \frac{i(i+2)}{2} - 1, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 2) \end{cases}$$

Untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $i \equiv 0(\text{mod } 2)$

$$f(u_{i,j}) = n^2 + 3n + 1 - \frac{i^2}{2} - 2j, \quad 1 \leq j \leq i$$

Untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $i \equiv 1(\text{mod } 2)$

$$f(u_{i,j}) = \frac{(i-1)(i+1)}{2} - 1 + 2j, \quad 1 \leq j \leq i$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf  $G$ , adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^n \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1(\text{mod } 2)}}^n \{n^2 + 3n + 1 - 1/2 (i+1)^2\}$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \left\{ n^2 + 3n - 1, n^2 + 3n - 7, n^2 + 3n - 17, \dots, \frac{n^2 + 4n + 1}{2} \right\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \left\{ n^2 + 3n - 1, n^2 + 3n - 7, n^2 + 3n - 17, \dots, \frac{n^2 + 6n + 2}{2} \right\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \left\{ \frac{i(i+2)}{2} - 1 \right\}$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \left\{ 3, 11, 23, \dots, \frac{n^2 - 3}{2} \right\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \left\{ 3, 11, 23, \dots, \frac{n^2 + 2n - 2}{2} \right\}$$

$$V_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \left( \bigcup_{j=1}^i \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^n \left( \bigcup_{j=1}^i \left\{ n^2 + 3n + 1 - \frac{i^2}{2} - 2j \right\} \right)$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 1 - 2j; 1 \leq j \leq 2\} \cup \{n^2 + 3n - 7 - 2j; 1 \leq j \leq 4\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ \frac{n^2 + 8n + 1}{2} - 2j; 1 \leq j \leq n - 1 \right\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 1 - 2j; 1 \leq j \leq 2\} \cup \{n^2 + 3n - 7 - 2j; 1 \leq j \leq 4\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ \frac{n^2 + 6n + 1}{2} - 2j; 1 \leq j \leq n \right\}$$

$$V_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^n \left( \bigcup_{j=1}^i \{f(u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^n \left( \bigcup_{j=1}^i \left\{ \frac{(i-1)(i+1)}{2} - 1 + 2j \right\} \right)$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{2j - 1; j = 1\} \cup \{3 + 2j; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{11 + 2j; 1 \leq j \leq 5\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ \frac{n^2 - 3}{2} + 2j; 1 \leq j \leq n \right\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{2j - 1; j = 1\} \cup \{3 + 2j; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{11 + 2j; 1 \leq j \leq 5\}$$

$$\cup \dots \cup \left\{ \frac{n^2 - 2n - 2}{2} + 2j; 1 \leq j \leq n - 1 \right\}$$

Himpunan label sisi pada graf  $G$ , adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^{n-2} \{|(n^2 + 3n + 2) - (i^2 + 3i + 2)|\}$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 4, n^2 + 3n - 18, \dots, 2n + 2\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 4, n^2 + 3n - 18, \dots, 4n + 2\}$$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\}$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \{|(i^2 + 3i + 2) - (n^2 + 3n + 2)|\}$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 10, n^2 + 3n - 28, \dots, 2n + 2\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 10, n^2 + 3n - 28, \dots, 4n + 2\}$$

$$E_3 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^n \left( \bigcup_{j=1}^i \{f(v_i u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 1 \pmod{2}}}^n \left( \bigcup_{j=1}^i \{|n^2 + 3n + 2 - 2j - i(i + 1)|\} \right)$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 2\} \cup \{n^2 + 3n - 12, n^2 + 3n - 14, n^2 + 3n - 16\}$$

$$\cup \dots \cup \{2n, 2n - 2, \dots, 2\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 2\} \cup \{n^2 + 3n - 12, n^2 + 3n - 14, n^2 + 3n - 16\}$$

$$\cup \dots \cup \{4n, 4n - 2, \dots, 2n + 4\}$$

$$E_4 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \left( \bigcup_{j=1}^i \{f(v_i u_{i,j})\} \right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \equiv 0 \pmod{2}}}^{n-1} \left( \bigcup_{j=1}^i \{|(i(i+1) + 2j) - (n^2 + 3n + 2)|\} \right)$$

Untuk  $n$  ganjil diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 6, n^2 + 3n - 8\} \cup \dots \cup \{4n, 4n - 2, \dots, 2n + 4\}$$

Untuk  $n$  genap diperoleh

$$= \{n^2 + 3n - 6, n^2 + 3n - 8\} \cup \dots \cup \{2n, 2n - 2, 2n - 4, \dots, 2\}$$

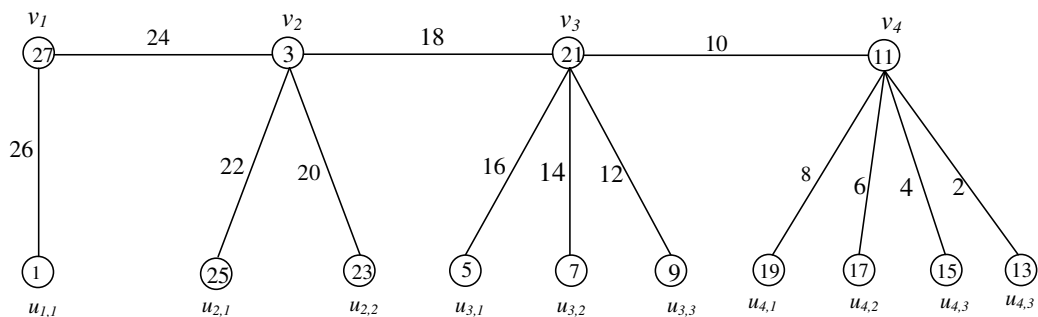
Terbukti untuk  $n$  bilangan ganjil dan bilangan genap,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\} = \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 3n - 1\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $P_n(1, 2, \dots, n)$  merupakan graf *super graceful*.

■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan titik bernilai ganjil dan semua himpunan sisi bernilai genap. Terbukti, graf  $P_n(1, 2, \dots, n)$  adalah graf *super graceful*.

### Contoh 2.7

Graf  $P_4(1, 2, 3, 4)$  adalah *super graceful*.



Gambar 3.9 Graf  $P_4(1, 2, 3, 4)$

### Teorema 2.8 [7]

Setiap graf bipartit komplit  $K_{m,n}$  ( $m \geq 1, n \geq 1$ ) adalah graf *super graceful*.

#### Bukti:

Misal  $V = V_1 \cup V_2$  dimana  $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$  dan  $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ . Dengan  $|V(K_{m,n})| = m + n$  dan  $|E(K_{m,n})| = mn$

Pelabelan titik untuk graf  $K_{m,n}$  didefinisikan dengan:

$$f(u_i) = i, 1 \leq i \leq m \text{ dan } f(v_j) = m + (m + 1)j, 1 \leq j \leq n$$



Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik pada graf  $K_{m,n}$ , adalah:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^m \{f(u_i)\} = \bigcup_{i=1}^m \{i\} = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$V_2 = \bigcup_{j=1}^n \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=1}^n \{m + (m + 1)j\} \\ = \{m + (m + 1), m + 2(m + 1), \dots, m + n(m + 1)\}$$

Himpunan label sisi pada graf  $K_{m,n}$ , adalah:

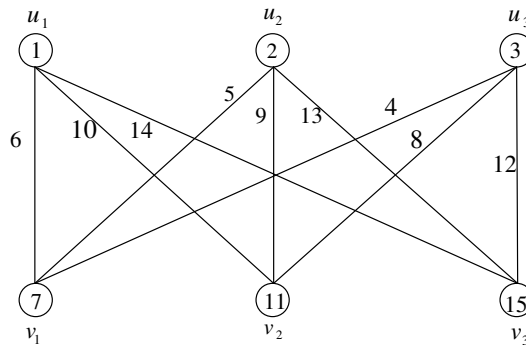
$$E = \bigcup_{i=1}^m \left( \bigcup_{j=1}^n \{f(u_i v_j)\} \right) \\ = \bigcup_{i=1}^m \left( \bigcup_{j=1}^n \{m + (m + 1)j - i\} \right) \\ = \{m + (m + 1) - 1, m + 2(m + 1) - 1, \dots, m + n(m + 1) - 1\} \cup \\ \{m + (m + 1) - 2, m + 2(m + 1) - 2, \dots, m + n(m + 1) - 2\} \cup \dots \cup \\ \{m + 1, 2(m + 1), \dots, n(m + 1)\}$$

Terbukti  $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\} = \{1, 2, 3, \dots, m + n(m + 1)\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf  $K_{m,n}$  merupakan graf *super graceful*. ■

Diperoleh semua himpunan label titik dan himpunan label sisi berbeda dan gabungannya adalah  $\{1, 2, 3, \dots, m + n(m + 1)\}$ . Terbukti, graf  $K_{m,n}$  ( $m \geq 1, n \geq 1$ ) adalah graf *super graceful*.

### Contoh 2.8

Graf  $K_{3,3}$  adalah *super graceful*.



Gambar 3.10 Graf  $K_{3,3}$

**Teorema 2.9 [7]**

Graf *Coconut tree* adalah graf *super graceful*.

**Bukti:**

Pelabelan titik untuk graf  $G$  didefinisikan dengan:

$$f(v_j) = \begin{cases} 2i + 1 - j, & 1 \leq j \leq i, \text{ dan } j \equiv 0(\text{mod } 2) \\ j, & 1 \leq j \leq i, \text{ dan } j \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases}$$

$$f(v_k) = 2k - 1, i + 1 \leq k \leq n.$$

Selanjutnya dikelompokkan himpunan label titik dan sisi sebagai berikut.

Himpunan label titik graf  $G$ , adalah:

$$V_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(\text{mod } 2)}}^i \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(\text{mod } 2)}}^i \{2i + 1 - j\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{2i - 1, 2i - 3, \dots, i + 1\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

$$= \{2i - 1, 2i - 3, \dots, i + 2\}$$

$$V_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{i-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1(\text{mod } 2)}}^{i-1} \{j\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{1, 3, 5, \dots, i - 1\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

$$= \{1, 3, 5, \dots, i\}$$

$$V_3 = \bigcup_{k=i+1}^n \{f(v_k)\} = \bigcup_{k=i+1}^n \{2k - 1\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{2i + 1, 2i + 3, \dots, 2n - 1\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

$$= \{2i + 1, 2i + 3, \dots, 2n - 1\}$$

Himpunan label sisi garf  $G$ , adalah:

$$E_1 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{i-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0(\text{mod } 2)}}^{i-2} \{|2(i - j)|\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{2(i - 2), 2(i - 4), \dots, 4\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

$$= \{2(i-2), 2(i-4), \dots, 2\}$$

$$E_2 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 1 \pmod{2}}}^{i-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \equiv 0 \pmod{2}}}^{i-2} \{|2(i-j)|\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{2(i-1), 2(i-3), \dots, 2\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

$$= \{2(i-1), 2(i-3), \dots, 4\}$$

$$E_3 = \bigcup_{k=i+1}^n \{f(v_k v_1)\} = \bigcup_{k=i+1}^n \{|2k-2|\}$$

Untuk  $i$  genap diperoleh

$$= \{2i, 2i+2, 2i+4, \dots, 2n-2\}$$

Untuk  $i$  ganjil diperoleh

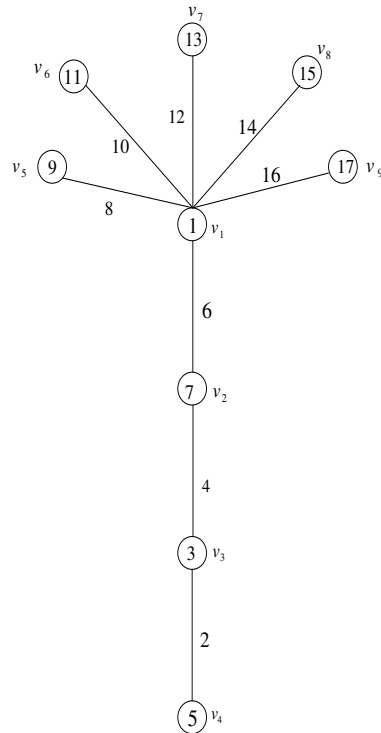
$$= \{2i, 2i+2, 2i+4, \dots, 2n-2\}$$

Terbukti untuk bilangan  $i$  genap dan ganjil,  $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$  bijektif dan  $f(uv) = |f(u) - f(v)|$  sehingga graf *Coconut tree* merupakan graf *super graceful*. ■

Dari kedua kasus diatas, diperoleh semua himpunan label titik bernilai ganjil dan semua himpunan label sisi bernilai genap. Terbukti, graf *Coconut tree* adalah graf *super graceful*.

### Contoh 2.9

Graf *Coconut tree* untuk  $i=4$  dan  $n=9$  adalah graf *super graceful*.



**Gambar 3.11** Graf *Coconut tree* untuk  $i = 4$  dan  $n = 9$

### III. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai pelabelan *super graceful* untuk beberapa graf khusus, dapat diambil kesimpulan yaitu setiap himpunan titik berlabel ganjil dan himpunan sisinya berlabel genap, kecuali untuk graf  $C_n$  dan graf  $K_{m,n}$ . Untuk graf  $C_n$  tidak memiliki himpunan label sisi genap dan himpunan label titik ganjil karena pada graf  $C_n$  jumlah banyaknya titik dan sisi bernilai genap, maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil begitu juga dengan graf  $K_{m,n}$  yang memiliki jumlah banyaknya titik dan sisi dapat bernilai ganjil atau genap maka label titiknya tidak semuanya bernilai ganjil.

### IV. Referensi

- [1] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB.
- [2] Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Willey and Sons.
- [3] Baskar Babujee, J. dan V. Vishnupriya. 2011. *On A-Vertex Consecutive Edge Bimagic Labeling in Graphs*. European Journal of Scientific Research, Vol.63, No.1, hal 84-89.
- [4] Chartrand, G dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs, 3<sup>rd</sup> ed*, Chapman & Hill. London.

- [5] Dwi Asyani, Destian. 2012. *Pelabelan  $Q(a)P(b)$ -super graceful-sisi pada graf kubus hiper  $Q_k$  untuk  $k \leq 3$* . Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.
- [6] Ghafur, Abdul. 2010. *Pelabelan Super Edge-graceful pada path dan fan graph*. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.
- [7] Perumal, M.A, Navaneethakrishnan, S, Arockiaraj, S dan Nagarajan.A. 2011. *Super Graceful Labeling for Some Special Graphs*. IJJRAS, Vol.9, hal 382-404.
- [8] Perumal, M.A, Navaneethakrishnan, S, Arockiaraj, S dan Nagarajan.A.. 2012. *Super Graceful Labeling for Some Simple Graphs*. Journal of Mathematics and Soft Computing, Vol.2,No.1,hal 35-49.
- [9] Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Application*. edisi ke-7. New York: McGraw. Hill.
- [10] Seputro, Theresia MH Tirta. 1992. *Graf Pengantar*. Surabaya :University Press IKIP.
- [11] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu
- [12] Wilson, J. Robin and John J. Watskin. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design
- [13] Yismianto, Bambang dan Irawanto, Bambang. 2003. *Buku Ajar Matematika Diskret I*. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.