FUNGTOR KONTRAVARIAN DAN KATEGORI ABELIAN

Agus Suryanto, Nikken Prima Puspita, Robertus Heri S. U.
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro
Jalan Prof. H. Soedarto, SH. Tembalang Semarang 50275

e-mail : suryanto1995@gmail.com

ABSTRAK. Suatu kategori terdiri dari suatu kelas yang berisi obyek-obyek, himpunan morfisma dan memenuhi aksioma tertentu. Fungtor kontravarian $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ merupakan pemetaan yang memetakan setiap obyek $A \in |\mathcal{C}|$ ke obyek $T(A) \in |\mathcal{D}|$ dan memetakan setiap morfisma $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ ke morfisma $T(f) \in [T(B), T(A)]_{\mathcal{D}}$ serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Obyek nol, kernel dan kokernel serta produk dan koproduk mempunyai peranan penting dalam kategori abelian. Kategori dikatakan kategori abelian jika pada kategori tersebut terdapat obyek nol, produk dan koproduk berhingga, setiap morfisma mempunyai kernel dan kokernel, setiap monomorfisma merupakan kernel serta setiap epimorfisma merupakan kokernel.
Kata kunci: kategori, fungtor kontravarian, obyek nol, produk, kernel, kategori abelian.

I. PENDAHULUAN

Teori kategori merupakan bagian dari aljabar abstrak yang pertama kali diperkenalkan oleh Eilenberg dan Mac Lane melalui tulisan yang berjudul "*General theory of natural equivalences"* pada tahun 1945 [1]. Kategori sendiri melibatkan tiga komponen, yaitu suatu kelas yang terdiri dari obyek-obyek, himpunan morfisma, dan aksioma-aksioma tertentu.

Pada tahun 1957, Grothendieck memperkenalkan tentang kategori abelian [1]. Suatu kategori disebut kategori abelian jika pada kategori tersebut mempunyai obyek nol, produk dan koproduk berhingga, setiap morfisma mempunyai kernel dan kokernel, setiap monomorfisma merupakan kernel dan setiap epimorfisma merupakan kokernel [2].

Pada tahun 2012, Soleh Munawir [3] dalam skripsinya dengan judul Fungtor Kovarian pada Kategori membahas tentang fungtor kovarian beserta sifat-sifatnya yang mana mempunyai sifat yang sama seperti pemetaan pada umumnya yaitu injektif, surjektif, dan bijektif. Selain itu, pada tahun yang sama Rizky Handy Wibowo [4] dalam skripsinya dengan judul Kategori R-Modul membahas sifat-sifat yang ada pada kategori di mana obyek-obyeknya berupa koleksi dari kelas-kelas R-Modul dan morfismanya berupa homomorfisma R-Modul. Pada kesempatan ini dibahas tentang fungtor kontravarian pada kategori secara umum, aspek-aspek yang terkait dengan kategori abelian seperti obyek nol dan morfisma nol, kernel dan kokernel, produk dan koproduk, serta beberapa sifat yang berkaitan dengan kategori abelian itu sendiri.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang fungtor kontravarian, aspek-aspek yang berkaitan dengan kategori abelian seperti obyek nol dan morfisma nol, kernel dan kokernel, produk dan koproduk, serta beberapa sifat dari kategori abelian itu sendiri. Terlebih dahulu diberikan pembahasan tentang fungtor kontravarian.

2.1 Fungtor Kontravarian

Definisi fungtor kontravarian tidak jauh berbeda dengan definisi fungtor kovarian. Berikut definisi fungtor kontravarian.

Definisi 2.1 [2] *Diberikan kategori $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$. Relasi $\mathcal{t} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ disebut fungtor kontravarian jika $\mathcal{t}$ memetakan setiap obyek $A \in |\mathcal{C}|$ ke obyek $\mathcal{t}(A) \in |\mathcal{D}|$ dan memetakan setiap morfisma $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ ke $\mathcal{t}(f) \in [T(B), T(A)]_{\mathcal{D}}$ sedemikian sehingga*

1. $\mathcal{t}(I_A) = I_{\mathcal{t}(A)}$
2. $\mathcal{t}(g \circ f) = \mathcal{t}(f) \circ \mathcal{t}(g)$

Contoh 2.2

1. Fungtor kovarian $X_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ untuk suatu $X \in |\mathcal{D}|$ dengan $X_{\mathcal{C}}(A) = X \in |\mathcal{D}|$ untuk setiap $A \in |\mathcal{C}|$ dan $X_{\mathcal{C}}(f) = I_X \in [X, X]_{\mathcal{D}}$ untuk setiap $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ merupakan fungtor kontravarian.

2. Fungtor kontravarian $H_A : \mathcal{C} \longrightarrow ENS$ untuk suatu $A \in |\mathcal{C}|$ dengan $H_A(X) = [X, A]_{\mathcal{C}}$ untuk setiap $X \in |\mathcal{C}|$ dan jika $f : X \longrightarrow Y$ maka $H_A(f) : [Y, A]_{\mathcal{C}} \longrightarrow [X, A]_{\mathcal{C}}$ di mana untuk setiap $u \in [Y, A]_{\mathcal{C}}$, $H_A(f)(u) = u \circ f$.

Teorema 2.3 [1] *Diberikan sebarang kategori $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{E}$. Jika $\mathscr{s} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ adalah fungtor kovarian dan $\mathscr{t} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ adalah fungtor kontravarian, maka $\mathscr{t} \circ \mathscr{s} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ merupakan fungtor kontravarian.*

Pada Teorema 2.3, jika salah satu fungtornya adalah fungtor kovarian dan yang satunya lagi adalah fungtor kontravarian, maka komposisinya adalah fungtor kontravarian. Sedangkan pada teorema berikut jika keduanya adalah fungtor kontravarian, justru komposisinya adalah fungtor kovarian.

Teorema 2.4 [1] *Diberikan sebarang kategori $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dan $\mathcal{E}$. Jika $\mathscr{s} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dan $\mathscr{t} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ keduanya adalah fungtor kontravarian, maka $\mathscr{t} \circ \mathscr{s} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ merupakan fungtor kovarian.*

Setelah diberikan pembahasan tentang fungtor kontravarian, pada subbab berikut ini dibahas tentang obyek nol dan morfisma nol.

2.2 Obyek Nol dan Morfisma Nol dalam Kategori

Definisi 2.5 [2] *Diberikan sebarang kategori $\mathcal{C}$. Obyek $N \in |\mathcal{C}|$ disebut obyek nol jika N merupakan obyek terminal sekaligus obyek inisial.*

Contoh 2.6 Pada kategori grup abelian Ab, obyek nolnya adalah grup yang hanya terdiri dari satu elemen, yaitu elemen identitasnya sendiri.

Jika dalam kategori terdapat obyek nol, maka bisa dipastikan dalam kategori tersebut terdapat morfisma nol.

Definisi 2.7 [1] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$ *dan morfisma* $f : A \longrightarrow B$, *morfisma*

1. f *disebut morfisma nol kiri jika* $f \circ g = f \circ h$ *untuk setiap* $g, h : C \longrightarrow A$,
2. f *disebut morfisma nol kanan jika* $g \circ f = h \circ f$ *untuk setiap* $g, h : B \longrightarrow C$,
3. f *disebut morfisma nol jika f merupakan morfisma nol kiri dan kanan.*

Lemma 2.8 [1] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$.

1. *Jika* $f : A \longrightarrow B$ *morfisma nol kanan dan* $g : C \longrightarrow A$ *morfisma nol kiri dan* $f \circ g$ *ada (bukan himpunan kosong), maka* $f \circ g$ *merupakan morfisma nol.*
2. *Jika* $A \in |\mathcal{C}|$ *merupakan obyek inisial, maka* $f : A \longrightarrow B$ *merupakan morfisma nol kanan untuk setiap* $B \in |\mathcal{C}|$.
3. *Jika* $0 \in |\mathcal{C}|$ *merupakan obyek nol, maka* $f : 0 \longrightarrow B$ *dan* $g : C \longrightarrow 0$ *serta* $f \circ g$ *merupakan morfisma nol.*

Pernyataan pada Lemma 2.8 poin 3 bisa digambarkan dalam bentuk diagram berikut. Untuk lebih memudahkan digunakan simbol 0 untuk menyatakan obyek nol.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

Diagram 2.1

Pada Diagram 2.1, morfisma $A \longrightarrow B$ dikatakan morfisma nol jika f dapat difaktorkan menjadi komposisi morfisma yang melalui obyek nol, atau dengan kata lain $A \longrightarrow B$ morfisma nol jika $A \longrightarrow B = A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$.

Proposisi 2.9 [5] *Diberikan kategori* $\mathcal{C}$ *dengan obyek nol* 0. *Komposisi antara morfisma nol dengan sebarang morfisma adalah morfisma nol.*

Agar lebih mudah dipahami, digunakan simbol o untuk menyatakan morfisma nol.

Proposisi 2.10 [5] *Diberikan kategori* $\mathcal{C}$ *dengan obyek nol* 0, $f : A \longrightarrow B$ *monomorfisma dan* $g : C \longrightarrow A$. *Jika* $f \circ g = o$ *maka* $g = o$.

Subbab berikut ini membahas tentang kernel dan kokernel yang merupakan salah satu hal yang diperlukan dalam kategori abelian.

2.3 Kernel dan Kokernel dalam Kategori

Definisi kernel dan kokernel dalam kategori diberikan berdasarkan literatur yang ditulis oleh Freyd [6]. Terlebih dahulu diberikan definisi tentang kernel.

Definisi 2.11 [6] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$ *yang mempunyai morfisma nol dan morfisma* $f : A \longrightarrow B$. *Morfisma* $g : K \longrightarrow A$ *disebut kernel dari* f, *disimbolkan* $g = ker(f)$ *jika*

1. $f \circ g = o$
2. *Untuk setiap morfisma* $h : X \longrightarrow A$ *sedemikian sehingga* $f \circ h = o$, *maka terdapat dengan tunggal morfisma* $i : X \longrightarrow K$ *sehingga* $h = g \circ i$.

Proposisi 2.12 [5] *Diberikan kategori* $\mathcal{C}$ *dengan obyek nol. Kernel dari morfisma nol* $o : A \longrightarrow B$ *adalah morfisma identitas* $I_A : A \longrightarrow A$.

Setelah diberikan definisi tentang kernel, berikut diberikan definisi tentang kokernel.

Definisi 2.13 [6] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$ *yang mempunyai morfisma nol dan morfisma* $f : A \longrightarrow B$. *Morfisma* $g : B \longrightarrow K$ *disebut kokernel dari* f, *disimbolkan* $g = koker(f)$ *jika*

1. $g \circ f = o$

2. *Untuk setiap morfisma* $h : B \longrightarrow X$ *sedemikian sehingga* $h \circ f = o$, *maka terdapat dengan tunggal morfisma* $i : K \longrightarrow X$ *sehingga* $h = i \circ g$.

Selain obyek nol, kernel dan kokernel, masih terdapat produk dan koproduk yang merupakan hal dasar yang diperlukan dalam kategori abelian.

2.4 Produk dan Koproduk dalam Kategori

Produk dan koproduk yang dijelaskan adalah produk dan koproduk dari dua buah obyek dalam suatu kategori. Penjelasan selengkapnya tentang definsi produk dan koproduk diberikan berdasarkan literatur karangan Freyd [6].

Definisi 2.14 [6] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$. *Misalkan* $A, B \in |\mathcal{C}|$, *obyek* $P \in |\mathcal{C}|$ *disebut produk dari A dan B jika terdapat morfisma* $p_1 : P \longrightarrow A$ *dan* $p_2 : P \longrightarrow B$ *sedemikian sehingga untuk setiap pasangan morfisma* $f_1 : X \longrightarrow A$ *dan* $f_2 : X \longrightarrow B$ *untuk setiap* $X \in |\mathcal{C}|$ *maka terdapat dengan tunggal morfisma* $f : X \longrightarrow P$ *sedemikian sehingga* $p_1 \circ f = f_1$ *dan* $p_2 \circ f = f_2$.

Proposisi 2.15 [6] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$. *Misalkan* $A, B \in |\mathcal{C}|$, *jika* $P, P' \in |\mathcal{C}|$ *merupakan produk dari A dan B maka P dan* P' *isomorfis.*

Jika arah panah dari setiap morfisma pada Definisi 2.14 dibalik, maka akan didapatkan definisi dari koproduk.

Definisi 2.16 [6] *Diberikan sebarang kategori* $\mathcal{C}$. *Misalkan* $A, B \in |\mathcal{C}|$, *obyek* $S \in |\mathcal{C}|$ *disebut koproduk dari A dan B jika terdapat morfisma* $c_1 : A \longrightarrow S$ *dan* $c_2 : B \longrightarrow S$ *sedemikian sehingga untuk setiap pasangan morfisma* $g_1 : A \longrightarrow X$ *dan* $g_2 : B \longrightarrow X$ *untuk setiap* $X \in |\mathcal{C}|$ *maka terdapat dengan tunggal morfisma* $g : S \longrightarrow X$ *sedemikian sehingga* $g \circ c_1 = g_1$ *dan* $g \circ c_2 = g_2$.

Setelah diberikan semua pembahasan tentang hal-hal dasar yang diperlukan dalam kategori abelian, subbab berikut menyajikan pembahasan tentang definisi kategori abelian beserta beberapa sifat yang terkait kategori abelian itu sendiri.

2.5 Kategori Abelian

Literarur yang digunakan untuk mengkaji kategori abelian adalah literatur karangan Schubert [2]. Berikut beberapa definisi, teorema, lemma, ataupun proposisi tentang kategori abelian.

Definisi 2.17 [2] *Suatu kategori dikatakan abelian jika memenuhi aksioma berikut*

1. *Terdapat obyek nol.*
2. *Terdapat produk behingga.*
3. *Terdapat koproduk berhingga.*
4. *Setiap morfisma mempunyai kernel.*
5. *Setiap morfisma mempunyai kokernel.*
6. *Setiap monomorfisma merupakan kernel.*
7. *Setiap epimorfisma merupakan kokernel.*

Teorema 2.18 [2] *Diberikan kategori abelian $\mathcal{A}$. Jika $m : B \longrightarrow C$ merupakan monomorfisma, maka $f : A \longrightarrow B$ dan $m \circ f : A \longrightarrow C$ mempunyai kernel yang sama.*

Teorema 2.19 [2] *Diberikan kategori abelian $\mathcal{A}$. Jika $m : A \longrightarrow B$ merupakan monomorfisma, maka $ker(m) = o$.*

Bukti:

Diambil sebarang monomorfisma $m : A \longrightarrow B$ dalam kategori abelian $\mathcal{A}$ dan morfisma identitas $I_A : A \longrightarrow A$. Misalkan $ker(I_A) = f : C \longrightarrow A$, maka $I_A \circ f = o$. Oleh karena $I_A \circ f = f$ dan $I_A \circ f = o$ maka $f = o$, ditunjukkan $ker(m \circ I_A) = ker(m) = f = o$. Berdasarkan Teorema 2.18, jika $m : A \longrightarrow B$

monomorfisma, maka I_A dan $m \circ I_A$ mempunyai kernel yang sama. Dengan kata lain $ker(m \circ I_A) = ker(m) = ker(I_A) = f = o$. ■

Teorema 2.20 [2] *Diberikan kategori abelian $\mathcal{A}$. Jika $k : K \longrightarrow A$ adalah kernel dari $f : A \longrightarrow B$ dan $p : A \longrightarrow C$ kokernel dari k, maka k juga merupakan kernel dari p.*

Teorema 2.21 [2] *Diberikan kategori abelian $\mathcal{A}$. Jika m monomorfisma, maka $m = ker\big(koker(m)\big)$.*

Bukti:

Diambil sebarang monomorfisma $m : A \longrightarrow B$. Oleh karena m monomorfisma, maka berdasarkan Definisi 2.17 m adalah kernel dari suatu morfisma $f : B \longrightarrow C$ dan m mempunyai kokernel katakanlah $k : B \longrightarrow D$. Oleh karena $m = ker(f)$ dan $p = kokernel(m)$, maka berdasarkan Teorema 2.20, jika $m : A \longrightarrow B$ kernel dari $f : B \longrightarrow C$ dan $k : B \longrightarrow D$ kokernel dari m maka m juga merupakan kernel dari k. Dengan demikian $m = ker(k) = ker\big(koker(m)\big)$. ■

III. KESIMPULAN

Berdasarkan dari pembahasan pada Bab II diperoleh bahwa selain fungtor kovarian, terdapat fungtor kontravarian yang merupakan pemetaan antar kategori. Fungtor kovarian dan fungtor kontravarian memiliki perbedaan dalam hal pemetaan morfisma dan komposisi morfismanya.

Pada suatu kategori, terdapat suatu obyek yang disebut obyek nol. Akan tetapi, tidak semua kategori memiliki obyek nol. Jika pada suatu kategori terdapat obyek nol, maka bisa dipastikan kategori tersebut memiliki morfisma nol. Morfisma nol erat kaitannya dengan kernel dan kokernel. Obyek nol, kernel dan kokernel merupakan beberapa hal dasar yang ada pada kategori abelian. Selain itu, terdapat produk dan koproduk yang mempunyai peranan dalam kategori abelian. Suatu kategori bisa dikatakan kategori abelian jika pada kategori tersebut terdapat obyek nol, produk dan koproduk berhingga, setiap morfisma mempunyai kernel dan kokernel, setiap monomorfisma merupakan kernel serta setiap epimorfisma merupakan kokernel.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Pareigis, Bodo. 1970. *Categories and Functors.* New York: Academic Press.

[2] Schubert, Horst. 1972. *Categories.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[3] Munawir, Soleh. 2012. *Skripsi: Fungtor Kovarian pada Kategori.* Semarang: Universitas Diponegoro.

[4] Wibowo, Rizky Handy. 2012. *Skripsi: Kategori R-Modul.* Semarang: Universitas Diponegoro.

[5] Borceux, Francis. “Cambridge Books Online : Handbook of Categorical Algebra 2”. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511525865. Diunduh pada 22 Desember 2015.

[6] Freyd, Peter. 1964. *Abelian Categories: an Introduction to the Theory of Functors.* New York: Harper and Row.