PELABELAN GRACEFUL SATU MODULO w PADA BEBERAPA GRAF EULER

Isa[1], Lucia Ratnasari[2], R. Heru Tjahjana[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang, Semarang.

isatokbae07@gmail.com
ratnasari.lucia@yahoo.com
heru.math.undip@gmail.com

ABSTRACT. A graph G with q edges is said to be one modulo w graceful graph ($w \in \mathbb{Z}^+$) if there is a injective function from vertex set of graph G to $\{0,1,w,(w+1),2w,(2w+1),...,(q-1)w,(q-1)w+1\}$ in such a way that ϕ induces a function ϕ^* from edge set of graph G to $\{1,w+1,2w+1,...,(q-1)w+1\}$ defined as $\phi^*(uv)=|\phi(u)-\phi(v)|$ is bijective. In this Last Project, the following Euler graphs : n-polygonal snakes, $C_n^{(t)}$ and $P_{a,b}$ under certain conditions which admit one modulo w graceful labeling ($w \in \mathbb{Z}^+$) are learned.

Keywords: odd-graceful labeling, one modulo w graceful labeling, Euler graph, n polygonal snake, $C_n^{(t)}$, $P_{a,b}$.

I. PENDAHULUAN

Pada tahun 1963, terdapat metode baru pelabelan pada graf, yaitu pelabelan dengan menggunakan bilangan bulat (yang memenuhi kondisi tertentu). Metode tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček [8] pada tahun 1963, yaitu tentang pelabelan *magic*. Setelah itu, metode pelabelan graf tersebut berkembang, sebagai contoh Rosa [7] pada tahun 1967 mendefinisikan suatu β*-valuation* (Golomb [3] menyebutnya dengan istilah pelabelan *graceful* yang digunakan sampai sekarang) pada suatu graf G yang memiliki q sisi, sebagai fungsi injektif dari himpunan titik graf G ke himpunan $\{0,1,2,...,q\}$ sedemikian hingga ketika setiap sisi uv diberi label $|\phi(u)-\phi(v)|$, maka menghasilkan nilai yang berbeda.

Pelabelan *graceful* merupakan salah satu metode pengembangan dari pelabelan graf. Beberapa penulis yang telah membahas pelabelan *graceful* diantaranya adalah Gnanajothi [2] memperkenalkan tentang pelabelan *graceful* ganjil, Sekar [9] memperkenalkan tentang pelabelan *graceful* satu modulo 3, Putri [5] membahas tentang *graceful* sisi berarah pada graf yang menghubungkan graf sikel dan graf *star* dan Astri [4] membahas tentang pelabelan *graceful* pada graf duplikasi titik dan graf duplikasi sisi dari graf sikel.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1 [1]

Trail Euler adalah *trail* yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali. Bila *trail* tersebut kembali ke titik asal dan membentuk *trail* tertutup, maka *trail* tertutup tersebut dinamakan sirkuit Euler. Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut graf Euler.

Definisi 2.2 [10]

Suatu graf G dengan q sisi disebut graf *graceful* jika terdapat suatu fungsi injektif ϕ dari himpunan titik graf G ke $\{0,1,2,...,q\}$ sedemikian hingga mengakibatkan fungsi ϕ^* dari himpunan sisi graf G ke $\{1,2,...,q\}$ yang didefinisikan oleh $\phi^*(uv) = |\phi(u) - \phi(v)|$ bersifat bijektif.

Definisi 2.3 [10]

Suatu graf G dengan q sisi disebut graf *graceful* ganjil jika terdapat suatu fungsi injektif ϕ dari himpunan titik graf G ke $\{0,1,2,3,...,2q-1\}$ sedemikian hingga mengakibatkan fungsi ϕ^* dari himpunan sisi graf G ke $\{1,3,...,2q-1\}$ yang didefinisikan oleh $\phi^*(uv) = |\phi(u) - \phi(v)|$ bersifat bijektif.

Definisi 2.4 [6]

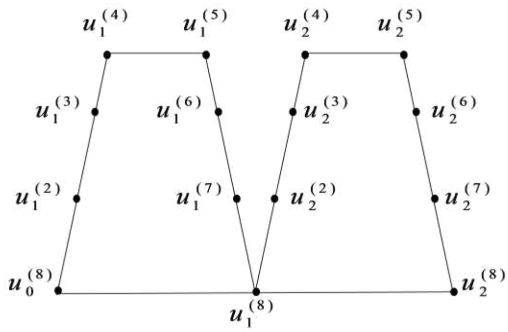
Suatu graf G dengan q sisi disebut graf *graceful* satu modulo w $(w \in \mathbb{Z}^+)$ jika terdapat suatu fungsi injektif ϕ dari himpunan titik graf G ke $\{0,1,w,(w+1),2w,(2w+1),...,(q-1)w,(q-1)w+1\}$ sedemikian hingga mengakibatkan fungsi ϕ^* dari himpunan sisi graf G ke $\{1,w+1,2w+1,...,(q-1)w+1\}$ yang didefinisikan oleh $\phi^*(uv) = |\phi(u) - \phi(v)|$ bersifat bijektif.

Pada kasus $w=1$, pelabelan pada graf G disebut pelabelan *graceful* dan pada kasus $w=2$, pelabelan pada graf G disebut pelabelan *graceful* ganjil.

Definisi 2.5 [6]

Suatu graf ular n-poligonal merupakan graf yang memuat $n-$ poligon sebanyak k yang diperoleh dari *path* $u_1,u_2,...,u_n$ dengan mengidentifikasikan titik-titik pendan pada salinan ke-i dari *path* P_n dengan u_{i-1} and u_i untuk $i=1,2,...,k$.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf ular 8-poligonal dengan $k = 2$

Teorema 2.1 [6]

Graf ular n-poligonal dengan $n \equiv 0 (\bmod 4)$ merupakan graf *graceful* satu modulo w untuk setiap bilangan bulat positif w.

Bukti :

Diberikan $n=4r$ untuk $r\geq 1$ dan sebarang k poligon dengan r adalah bilangan bulat positif. Dengan notasi titik $u_i^{(j)}$ untuk $j=1,2,...,4r$ dan $i=1,2,...,k$ yang merupakan titik ke-j pada poligon ke-i. Titik $u_0^{(4r)}=u_1^{(1)}$, titik $u_1^{(4r)}=u_2^{(1)}$, titik $u_2^{(4r)}=u_3^{(1)}$ dan seterusnya. Dipilih sebarang nilai w, fungsi ϕ didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned}\phi(u_{2d-1}^{(1)}) &= \phi(u_{2(d-1)}^{(4r)}) \qquad \text{dengan } d=1,2,3,...\\ &= 4wr(d-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(u_{2d}^{(1)}) &= \phi(u_{2d-1}^{(4r)}) \qquad \text{dengan } d=1,2,3,...\\ &= 4wrk-(w-1)-2wr+w-4wr(d-1)\end{aligned}$$

Untuk $u_{2d-1}^{(2)},...,u_{2d-1}^{(4r-1)}$ dengan $d=1,2,3,...$

$$\phi(u_{2d-1}^{(j)})=\begin{cases}4wrk-(w-1)-\dfrac{w(j-2)}{2}-4wr(d-1) & \text{untuk } j=2,4,6,...,4r-2\\ w+\dfrac{w(j-3)}{2}+4wr(d-1) & \text{untuk } j=3,5,7,...,2r-1\\ 2w+\dfrac{w(j-3)}{2}+4wr(d-1) & \text{untuk } j=2r+1,2r+3,...,4r-1\end{cases}$$

Untuk $u_{2d}^{(2)},...,u_{2d}^{(4r-1)}$ dengan $d=1,2,3,...$

$$\phi(u_{2d}^{(j)})=\begin{cases}w(2r+1)+\dfrac{w(j-2)}{2}+4wr(d-1) & \text{untuk } j=2,4,6,...,4r-2\\ 4wrk-(w-1)-2wr-\dfrac{w(j-3)}{2}-4wr(d-1) & \text{untuk } j=3,5,7,...,2r-1\\ 4wrk-(w-1)-2wr-w-\dfrac{w(j-3)}{2}-4wr(d-1) & \text{untuk } j=2r+1,2r+3,...,4r-1\end{cases}$$

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf ular n-poligonal untuk $n\equiv 0(\text{mod}\,4)$ dengan sebarang k poligon merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* satu modulo w.

Teorema 2.2 [6]

Graf ular n-poligonal dengan $n\equiv 2(\text{mod}\,4)$ merupakan graf *graceful* satu modulo w untuk setiap bilangan positif w jika banyak poligonnya genap.

Bukti :

Diberikan $n=4r+2$ untuk $r\geq 1$ dengan sebarang $k=2s$ poligon dengan r dan s adalah bilangan bulat positif. Dengan notasi titik $u_i^{(j)}$ untuk $j=1,2,...,4r+2$ dan $i=1,2,...,k$ yang merupakan titik ke-j pada poligon ke-i. Dipilih sebarang nilai w, fungsi ϕ didefinisikan oleh,

$$\begin{aligned}\phi(u_{2d-1}^{(1)}) &= \phi(u_{2(d-1)}^{(4r+2)}) \qquad \text{dengan } d=1,2,3,...,s+1\\ &= w(4r+3)(d-1)\end{aligned}$$

$$\phi(u_{2d}^{(1)}) = \phi(u_{2d-1}^{(4r+2)}) \qquad \text{dengan } d = 1,2,3,...,s$$
$$= w(4r+2)k - (w-1) - 4wr - w(4r+1)(d-1)$$

Untuk $u_{2d-1}^{(2)},...,u_{2d-1}^{(4r+1)}$ dengan $d = 1,2,3,...,s$

$$\phi(u_{2d-1}^{(j)}) = \begin{cases} w + \dfrac{w(j-3)}{2} + w(4r+3)(d-1) & \text{untuk } j = 3,5,7,...,4r+1 \\ w(4r+2)k - (w-1) - \dfrac{w(j-2)}{2} - w(4r+1)(d-1) & \text{untuk } j = 2,4,6,...,4r \end{cases}$$

Untuk $u_{2d}^{(2)},...,u_{2d}^{(4r+1)}$ dengan $d = 1,2,3,...,s$

$$\phi(u_{2d}^{(j)}) = \begin{cases} w(4r+2)k - (w-1) - 2wr - \dfrac{w(j-3)}{2} - w(4r+1)(d-1) & \text{untuk } j = 3,5,7,...,4r+1 \\ w(2r+1) + \dfrac{w(j-2)}{2} + w(4r+3)(d-1) & \text{untuk } j = 2,4,6,...,2r \\ w(2r+1) + 2w + \dfrac{w(j-2)}{2} + w(4r+3)(d-1) & \text{untuk } j = 2r+2, 2r+4,...,4r \end{cases}$$

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf ular n-poligonal untuk $n \equiv 2(\bmod 4)$ dengan k genap merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* satu modulo w.

Termotivasi dari Teorema 2.2, penulis mengkaji lebih lanjut tentang pelabelan *graceful* satu modulo w pada graf ular n-poligonal dengan $n \equiv 2(\bmod 4)$ untuk banyak poligon genap dan diperoleh bahwa saat $n = 6$, pelabelan *graceful* satu modulo w berlaku untuk semua poligon genap dan ganjil dengan $w = 2$. Penjelasan tersebut dinyatakan pada teorema berikut ini,

Teorema 2.3

Graf ular 6-Poligonal merupakan graf *graceful* satu modulo w untuk $w = 2$.

Bukti :

Diberikan $n = 6$ dengan sebarang k poligon. Dengan notasi titik $u_i^{(j)}$ untuk $j = 1,2,...,6$ dan $i = 1,2,...,k$ yang merupakan titik ke- j pada poligon ke-i. Fungsi ϕ didefinisikan oleh,

$$\phi(u_{2d-1}^{(1)}) = \phi(u_{2(d-1)}^{(6)}) \qquad \text{dengan } d = 1,2,3,...$$
$$= 14(d-1)$$

$$\phi(u_{2d}^{(1)}) = \phi(u_{2d-1}^{(6)}) \qquad \text{dengan } d = 1,2,3,...$$
$$= 12k + 1 - 10d$$

Untuk $u_{2d-1}^{(2)},...,u_{2d-1}^{(5)}$ dengan $d = 1,2,3,...$

$$\phi(u_{2d-1}^{(j)}) = \begin{cases} 14d + j - 15 & \text{untuk } j = 3,5 \\ 12k + 11 - 10d - j & \text{untuk } j = 2,4 \end{cases}$$

Untuk $u_{2d}^{(2)},...,u_{2d}^{(5)}$ dengan $d = 1,2,3,...$

$$\phi(u_{2d}^{(j)}) = \begin{cases} 12k + 8 - 10d - j & \text{untuk } j = 3,5 \\ 14d - 8 & \text{untuk } j = 2 \\ 14d - 2 & \text{untuk } j = 4 \end{cases}$$

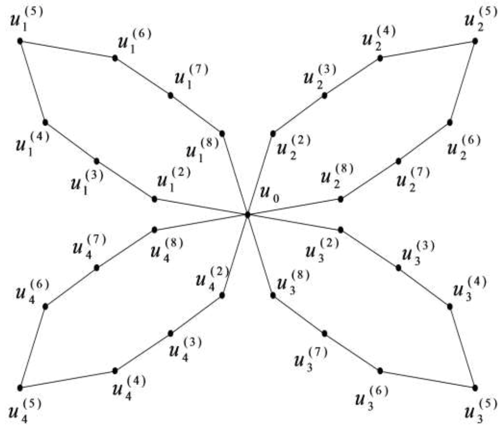
Teorema 2.3 juga bisa dinyatakan bahwa graf ular n-poligonal merupakan graf *graceful* ganjil. Sekar [9] telah menunjukkan bahwa semua graf ular n-poligonal dengan n genap merupakan graf *graceful* ganjil.

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf ular 6-poligonal dengan sebarang k poligon merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* ganjil (pelabelan *graceful* satu modulo 2).

Definisi 2.6 [6]

Suatu graf dengan satu titik gabungan dari t sikel dengan panjang n dinotasikan oleh $C_n^{(t)}$. Graf ini memiliki $t(n-1)+1$ titik dan tn sisi.

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf $C_8^{(4)}$

Teorema 2.4 [6]

Diberikan suatu graf $C_n^{(t)}$, yang dinotasikan dengan satu titik gabungan dari t sikel dengan panjang n. Graf $C_n^{(t)}$ adalah graf *graceful* satu modulo w saat $n = 4,8$ untuk $t > 2$ dan $n = 6$ untuk t bilangan genap dan $t \geq 4$ untuk setiap bilangan bulat positif $w > 1$.

Bukti :

Kasus 1 : $n = 4, t > 2$

Diberikan $u_i^{(j)}$ untuk $j = 1,2,3,4$ dan $i = 1,2,...,t$ yang merupakan titik ke-j pada sikel ke-i dengan satu titik u_0 menandakan titik-titik $u_1^{(1)}, u_2^{(1)},...,u_t^{(1)}$. Dipilih sebarang nilai $w > 1$, fungsi ϕ pada Kasus 1 didefinisikan oleh,

$\phi(u_0) = 0$

Untuk $u_i^{(2)}, u_i^{(3)}$, dan $u_i^{(4)}$ dengan $i = 1, 2, ..., t$

$$\phi(u_i^{(j)}) = \begin{cases} 4wt - (w-1) - \dfrac{w(j-2)}{2} - 2w(i-1) & \text{untuk } j = 2,4 \\ 4wt - 2w - 4w(i-1) & \text{untuk } j = 3 \end{cases}$$

Kasus 2 : $n = 8, t > 2$

Diberikan $u_i^{(j)}$ untuk $j = 1, 2, ..., 8$ dan $i = 1, 2, ..., t$ yang merupakan titik ke- j pada sikel ke- i dengan satu titik u_0 menandakan titik-titik $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, ..., u_t^{(1)}$. Dipilih sebarang nilai $w > 1$, fungsi ϕ pada Kasus 2 didefinisikan oleh,

$\phi(u_0) = 0$

Untuk $u_i^{(2)}, ..., u_i^{(8)}$ dengan $i = 1, 2, 3, ..., t$

$$\phi(u_i^{(j)}) = \begin{cases} 8wt - (w-1) - 2w(i-1) - \dfrac{w(j-2)}{6} & \text{untuk } j = 2,8 \\ 4wt - w - 4w(i-1) - \dfrac{2w(j-3)}{4} & \text{untuk } j = 3,7 \\ 6wt - (w-1) - 2w(i-1) - \dfrac{w(j-4)}{2} & \text{untuk } j = 4,6 \\ 6wt - 2w - 4w(i-1) & \text{untuk } j = 5 \end{cases}$$

Kasus 3 : $n = 6$, t bilangan genap dan $t \geq 4$

Diberikan $u_i^{(j)}$ untuk $j = 1, 2, ..., 6$ dan $i = 1, 2, ..., t$ yang merupakan titik ke- j pada sikel ke- i dengan satu titik u_0 menandakan titik-titik $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, ..., u_t^{(1)}$. Dipilih sebarang nilai $w > 1$, fungsi ϕ pada Kasus 3 didefinisikan oleh,

$\phi(u_0) = 0$

Untuk $u_i^{(2)}, u_i^{(3)}, ..., u_i^{(6)}$

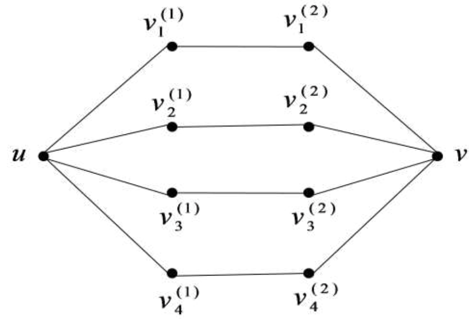
$$\phi(u_i^{(j)}) = \begin{cases} 6wt - (w-1) - 2w(i-1) - \dfrac{w(j-2)}{4} & \text{untuk } i = 1, 2, ..., t & \text{dan } j = 2,6 \\ 4wt - w - 4w(i-1) - \dfrac{2w(j-3)}{2} & \text{untuk } i = 1, 2, ..., t & \text{dan } j = 3,5 \\ 4wt - (w-1) - 2w(i-1) & \text{untuk } i = 1, 3, ..., t-1 & \text{dan } j = 4 \\ 4wt - (4w-1) - 2w(i-2) & \text{untuk } i = 2, 4, ..., t & \text{dan } j = 4 \end{cases}$$

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf $C_n^{(t)}$ saat $n = 4, 8$ untuk $t > 2$ dan $n = 6$ untuk t bilangan genap dan $t \geq 4$ untuk setiap bilangan bulat positif $w > 1$ merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* satu modulo w.

Definisi 2.7 [6]

Diberikan u dan v sebagai titik tetap. Titik u dan v dihubungkan dengan "b" *path* yang *disjoint* dengan panjang masing-masing *path* adalah "a". Graf yang dihasilkan dinotasikan dengan $P_{a,b}$.

Contoh 2.3



Gambar 2.3 Graf $P_{3,4}$

Teorema 2.5 [6]

Graf $P_{4r-1,4r}$ untuk semua $r \geq 1$ adalah graf *graceful* satu modulo w untuk setiap bilangan bulat positif w.

Bukti :

Diberikan $a = 4r-1$ dan $b = 4r$ untuk $r \geq 1$ dengan r adalah bilangan bulat positif. Dipilih sebarang nilai w, fungsi ϕ didefinisikan oleh,

$\phi(u) = 0$

$\phi(v) = w(8r^2 - 2) + 1$

Untuk $v_i^{(1)}, v_i^{(3)}, v_i^{(5)}, \ldots, v_i^{(4r-3)}$ dengan $i = 2,3,4,\ldots,4r$

$$\phi(v_i^{(j)}) = \begin{cases} w(4r-1)4r - (w-1) - w(i-2) - \dfrac{w}{2}(4r-1)(j-1) & \text{untuk } j = 1,3,5,\ldots,2r-1 \\ w(4r-1)4r - (2w-1) - w(i-2) - \dfrac{w}{2}(4r-1)(j-1) & \text{untuk } j = 2r+1, 2r+3, \ldots, 4r-3 \end{cases}$$

Untuk $v_i^{(2)}, v_i^{(4)}, \ldots, v_i^{(4r-2)}$

$$\phi(v_i^{(j)}) = \begin{cases} 4wr + w(i-2) + \dfrac{w}{2}(4r-1)(j-2) & \text{untuk } i = 2,3,4,\ldots,2r \\ 2wr + w(i-2r-1) + \dfrac{w}{2}(4r-1)(j-2) & \text{untuk } i = 2r+1, 2r+2, \ldots, 4r \end{cases}$$

Untuk $i = 1$

$$\phi(v_1^{(j)}) = \begin{cases} 2wr(4r-1) - (w-1) + \dfrac{w}{2}(j-1) & \text{untuk } j = 1,3,5,\ldots,4r-3 \\ 2wr(4r-1) - w - \dfrac{w}{2}(j-2) & \text{untuk } j = 2,4,6,\ldots,4r-2 \end{cases}$$

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf $P_{4r-1,4r}$ dengan $r \geq 1$ merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* satu modulo w.

Teorema 2.6 [6]

Graf $P_{a,b}$ untuk semua a bilangan genap dan $a \geq 4$ adalah graf *graceful* satu modulo w dan untuk semua b bilangan genap dan $b \geq 4$ untuk setiap bilangan bulat positif w.

Bukti :

Kasus 1 : $a = 4r$ untuk $r \geq 1$ dan $b = 2m$ untuk $m \geq 2$ dengan r dan m adalah bilangan bulat positif

Diberikan $v_i^{(j)}$ untuk $j = 1,2,3,...,4r-1$ dan $i = 1,2,...,2m$ yang merupakan titik ke- j pada path ke- i di b yang dihubungkan antara titik u dan v. Dipilih sebarang nilai w, fungsi ϕ pada Kasus 1 didefinisikan oleh,

$\phi(u) = w(r-1)$

$\phi(v) = 4wrm - w(r+1)$

Untuk $i = 1$

$$\phi(v_1^{(j)}) = \begin{cases} 8wrm - (w-1) - \dfrac{w(2r-1-j)}{2} & \text{untuk } j = 1,3,5,...,2r-1 \\ wr - w - \dfrac{wj}{2} & \text{untuk } j = 2,4,6,...,2r-2 \\ 4wrm - w - \dfrac{w(j-2r)}{2} & \text{untuk } j = 2r, 2r+2,...,4r-2 \\ 4wrm - (w-1) + \dfrac{w(j-2r-1)}{2} & \text{untuk } j = 2r+1, 2r+3,...,4r-1 \end{cases}$$

Untuk $v_i^{(1)}, v_i^{(3)}, v_i^{(5)},...,v_i^{(4r-1)}$ dengan $i = 2,3,...,2m$

$$\phi(v_i^{(j)}) = \begin{cases} 8wrm - (w-1) - wr - w(i-2) - \dfrac{w(j-1)(2m-1)}{2} & \text{untuk } j = 1,3,...,2r-1 \\ 8wrm - (2w-1) - wr - w(i-2) - \dfrac{w(j-1)(2m-1)}{2} & \text{untuk } j = 2r+1, 2r+3,...,4r-1 \end{cases}$$

Untuk $v_i^{(2)}, v_i^{(4)},...,v_i^{(4r-2)}$

$$\phi(v_i^{(j)}) = \begin{cases} w(2m+r-1) + w(i-2) + \dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i = 2,3,...,m \\ w(m+r-1) + w(i-m-1) + \dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i = m+1, m+2,...,2m \end{cases}$$

Kasus 2 : $a = 4r + 2$ untuk $r \geq 1$ dan $b = 2m$ untuk $m \geq 2$ dengan r dan m adalah bilangan bulat positif

Diberikan $v_i^{(j)}$ untuk $j = 1,2,3,...,4r+1$ dan $i = 1,2,...,2m$ yang merupakan titik ke- j pada path ke- i di b yang dihubungkan antara titik u dan v. Dipilih sebarang nilai w, fungsi ϕ pada Kasus 2 didefinisikan oleh,

$\phi(u) = wr$

$\phi(v) = w(4r+2)m - wr$

Untuk $i=1$

$$\phi(v_1^{(j)})=\begin{cases}2w(4r+2)m-(w-1)-\dfrac{w(2r+1-j)}{2} & \text{untuk } j=1,3,5,...,2r+1\\ \dfrac{w(2r-j)}{2} & \text{untuk } j=2,4,6,...,2r\\ w(4r+2)m-\dfrac{w(j-2r-2)}{2} & \text{untuk } j=2r+2,2r+4,...,4r\\ w(4r+2)m+1+\dfrac{w(j-2r-3)}{2} & \text{untuk } j=2r+3,2r+5,...,4r+1\end{cases}$$

Untuk $v_i^{(1)},v_i^{(3)},v_i^{(5)},...,v_i^{(4r+1)}$ dengan $i=2,3,...,2m$

$$\phi(v_i^{(j)})=2wm(4r+2)-(w-1)-w(r+1)-w(i-2)-\frac{w(j-1)(2m-1)}{2}$$

Untuk $v_i^{(2)},v_i^{(4)},v_i^{(6)},...,v_i^{(2r)}$

$$\phi(v_i^{(j)})=\begin{cases}w(r+2m)+w(i-2)+\dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i=2,3,4,...,m\\ w(r+m)+w(i-m-1)+\dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i=m+1,m+2,...,2m\end{cases}$$

Untuk $v_i^{(2r+2)},v_i^{(2r+4)},...,v_i^{(4r)}$

$$\phi(v_i^{(j)})=\begin{cases}w(r+2m+1)+w(i-2)+\dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i=2,3,4,...,m\\ w(r+m+1)+w(i-m-1)+\dfrac{w(j-2)(2m-1)}{2} & \text{untuk } i=m+1,m+2,...,2m\end{cases}$$

Fungsi injektif ϕ diatas mendefinisikan pelabelan *graceful* satu modulo w. Dengan demikian, graf $P_{a,b}$ untuk semua a bilangan genap dengan $a\geq 4$ dan untuk semua b bilangan genap dengan $b\geq 4$ merupakan graf Euler yang dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan *graceful* satu modulo w.

III. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan mengenai pelabelan *graceful* satu modulo w ($w \in \mathbb{Z}^+$) dapat disimpulkan bahwa beberapa graf Euler yang meliputi graf ular n-poligonal dengan $n\equiv 0 (\text{mod} 4)$, graf ular n-poligonal dengan $n\equiv 2 (\text{mod} 4)$ untuk banyak poligon genap, graf ular 6-poligonal untuk $w=2$, graf $C_n^{(t)}$ saat $n=4$ atau 8 untuk $t>2$ dan saat $n=6$ untuk t bilangan genap dengan $t\geq 4$ dan $w>1$, graf $P_{4r-1,4r}$ untuk semua $r\geq 1$ serta graf $P_{a,b}$ untuk semua bilangan genap a dengan $a\geq 4$ dan untuk semua bilangan genap b dengan $b\geq 4$ merupakan graf *graceful* satu modulo w.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Banyak pihak telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terima kasih ingin penulis sampaikan kepada :

1. Ibu Lucia Ratnasari, S.Si, M.Si selaku pembimbing 1 yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. R. Heru Tjahjana, S.Si, M.Si selaku pembimbing 2 yang dengan sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Semua pihak yang telah memberikan dukungan serta bantuan kepada penulis dalam penyusunan Tugas Akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Balakrishnan, V. K. 1997. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*. New York: The McGraw-Hill Companies.

[2] Gnanajothi, R. B. 1991. *Topics in Graph Theory, Ph. D. Thesis*. Madurai Kamaraj University.

[3] Golomb, S. W. 1972. "How to Number a Graph, in Graph Theory and Computing." *R. C. Read, ed*. New York: Academic Press, 23-37.

[4] Midhowati, Astri Narindra. 2013. *Pelabelan Graceful pada Graf Duplikasi Titik dan Graf Duplikasi Sisi dari Graf Sikel*. Semarang: FSM Universitas Diponegoro.

[5] Octafiani, Putri. 2012. *Pelabelan Graceful Sisi Berarah pada Graf yang Menghubungkan Graf Sikel dan Graf Star*. Semarang: FSM Universitas Diponegoro.

[6] Ramachandran, V. dan C. Sekar. 2013. "One Modulo N Gracefulness of n-Polygonal Snakes, $C_n^{(t)}$ and $P_{a,b}$." *International Journal of Engineering Research & Technology 2 (10)*: 3514-3529.

[7] Rosa, A. "On Certain Valuations of the Vertices of a Graph, Theory of Graph." *International Symposium, Rome, July (1966). Gordon and Breach, New York and Dunod Paris (1967)*, 349-355

[8] Sedláček, J. 1963. "Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications." *Proc. Symposium Smolenice*: 163-167.

[9] Sekar, C. 2002. *Studies in Graph Theory, Ph. D. Thesis*. Madurai Kamaraj University.

[10] Vaidya, S. K. dan S. H. Shah. 2013. "Graceful and Odd Graceful of Some Graphs." *International Journal of Mathematics and Soft Computing 3 (1)*: 61-68.