

# ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMI DENGAN PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP

Gunawan, W.M. Kusumawinahyu, M. Muslikh

Jurusan Matematika, F.MIPA, Universitas Brawijaya  
Email: Goenaa@gmail.com

**Abstrak.** Pada tulisan ini dibahas konstruksi dan analisis model epidemi dengan pengobatan dan vaksinasi tidak lengkap. Model ini merupakan pengembangan dari model *susceptibles*, *infectives*, dan *recovers* (*SIR*) dengan cara memperhitungkan subpopulasi tervaksin (*V*), subpopulasi *latent* (*E*), dan mengganti subpopulasi *recovers* (*R*) dengan subpopulasi *treatment* (*T*). Tulisan ini membahas titik kesetimbangan yang terdapat pada model dan syarat eksistensinya. Dalam pembahasan diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan endemi dan titik kesetimbangan nonendemi. Kestabilan lokal kedua titik tersebut dikaji dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Sistem persamaan disimulasikan secara numerik untuk menunjukkan perilaku titik kesetimbangan sistem.

**Kata Kunci:** *Epidemi, pengobatan tidak lengkap, vaksinasi tidak lengkap, analisis kestabilan, titik kesetimbangan.*

## 1. PENDAHULUAN

Model epidemi adalah model yang menggambarkan penyebaran virus atau bakteri dalam populasi tertutup, yang terdiri dari subpopulasi individu rentan atau *susceptibles* (*S*), *infectives* (*I*), dan *recovers* (*R*) (Huo dan Feng, 2011). Di paruh abad 20 banyak hal yang dilakukan oleh tenaga kesehatan untuk menurunkan jumlah penderita suatu penyakit yang disebabkan oleh virus, salah satunya adalah dengan adanya vaksinasi. Namun, vaksinasi tidak menjamin individu bebas dari virus. Virus yang belum cukup menyebabkan individu yang terjangkit tidak langsung menjadi penderita. Jika individu terjangkit virus, maka individu tersebut harus dirawat. Individu yang telah dirawat diasumsikan tidak dapat sembuh secara total, artinya ada sisa virus dalam tubuh yang masih ada walaupun terlihat sudah sehat (Li, dkk., 2001). Dalam tulisan Huo dan Feng (2011) telah dibahas analisis model *SVEIT*. Analisis model tersebut menghasilkan dua titik kesetimbangan beserta kestabilannya. Namun dalam tulisan tersebut kestabilan lokalnya ditentukan dengan menggunakan sifat *matrix next generation*, sedangkan dalam tulisan ini dibahas dengan melakukan linierisasi di setiap titik kesetimbangannya dan menggunakan metode kriteria Routh-Hurwitz.

## 2. MODEL EPIDEMI DENGAN PENGOBATAN DAN VAKSINASI TIDAK LENGKAP

Seperti yang telah dikemukakan oleh Huo dan Feng (2011), model epidemi dengan pengobatan dan vaksinasi tidak lengkap terdapat 5 subpopulasi, yaitu *S, V, E, I, T*. Model tersebut dinyatakan oleh sistem persamaan nonlinier

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= q\mu A - (\mu + p)S - \beta SI + \varepsilon V \\ \frac{dV}{dt} &= (1 - q)\mu A + pS - \beta\sigma VI - (\mu + \varepsilon)V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta I(S + \sigma V) - (\mu + \gamma)E + (1 - k)\delta T \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\mu + \alpha_1 + \xi)I + k\delta T \\ \frac{dT}{dt} &= \xi I - (\mu + \alpha_2 + \delta)T\end{aligned}\tag{1}$$

dengan  $\mu A$  menyatakan laju kelahiran alami,  $\mu$  menyatakan laju kematian alami,  $q$  mewakili laju kelahiran alami yang tidak tervaksin, sedangkan  $(1 - q)$  mewakili laju kelahiran alami yang tervaksin. Dalam hal ini  $p$  menyatakan tingkat vaksinasi untuk individu rentan,  $\varepsilon$  menyatakan koefisien laju kehilangan kekebalan dari individu tervaksin,  $\beta$  menyatakan koefisien transmisi infeksi dari individu rentan,  $\beta\sigma$  menyatakan koefisien transmisi infeksi dari individu tervaksin,  $\gamma$  menyatakan laju perpindahan dari tersembunyi ke terinfeksi,  $\xi$  menyatakan laju perpindahan dari terinfeksi ke pengobatan,  $\delta$  menyatakan laju perpindahan dari pengobatan,  $\alpha_1$  menyatakan tingkat kematian yang

disebabkan penyakit untuk individu dalam kompartemen  $I$ ,  $\alpha_2$  menyatakan tingkat kematian yang disebabkan penyakit untuk individu dalam kompartemen  $T$ , dan  $k$  menyatakan individu yang resisten terhadap obat.

### 3. TITIK KESETIMBANGAN dan SYARAT EKSISTENSI

Model memiliki 2 titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan nonendemi  $P_0(S_0, V_0, 0, 0, 0)$  dan titik kesetimbangan endemi  $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, T^*)$ . Di sini  $S_0 = \frac{A(\varepsilon+q\mu)}{p+\mu+\varepsilon}$ ,  $V_0 = \frac{A[p+(1-q)\mu]}{p+\mu+\varepsilon}$ ,  $S^* = \frac{((1-q)\varepsilon+(\beta\sigma I^*+\mu+\varepsilon)q)\mu A}{(\mu+p+\beta I^*)(\beta\sigma I^*+\mu+\varepsilon)-p\varepsilon}$ ,  $V^* = \frac{\mu A((1-q)(\mu+p+\beta I^*)+pq)}{(p+\mu+\beta I^*)(\mu+\varepsilon+\beta\sigma I^*)-p\varepsilon}$ ,  $E^* = \left[ \frac{(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi}{\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)} \right] I^*$ ,  $T^* = \frac{\xi}{(\mu+\alpha_2+\delta)} I^*$ , dan  $I^*$  adalah akar positif persamaan  $H(I) = 0$ , dengan  $H(I) = \frac{\beta\sigma I + (\varepsilon+q\mu) + \sigma[p+(1-q)\mu]}{(p+\mu+\beta I^*)(\mu+\varepsilon+\beta\sigma I^*)-p\varepsilon} - \frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A}$ . Dapat diperiksa bahwa  $H'(I) < 0$  sehingga  $H(I)$  adalah fungsi yang monoton turun untuk  $0 < I < A$ . Agar terdapat  $I^* \in (0, A]$  sedemikian sehingga  $H(I^*) = 0$  haruslah  $H(0) > 0$ , dengan  $H(0) = \frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A} (R_0 - 1)$ . Karena  $\frac{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)\mu A} > 0$ , maka  $H(0) > 0$  jika  $R_0 > 1$ , dengan  $R_0 = \frac{\beta\gamma(\mu+\alpha_2+\delta)(S_0+\sigma V_0)}{(\mu+\gamma)[(\mu+\alpha_1+\xi)(\mu+\alpha_2+\delta)-k\delta\xi]-(1-k)\delta\xi\gamma}$ . Jadi titik  $P_0$  selalu eksis, sedangkan titik  $P^*$  hanya eksis jika  $R_0 > 1$ .

### 4. KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Misalkan  $P^\theta = (S^\theta, V^\theta, E^\theta, I^\theta, T^\theta)$  adalah titik kesetimbangan sistem persamaan (1), maka hasil linearisasi sistem persamaan (1) di sekitar titik  $P^\theta$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}}{dt} &= -(\mu + p + \beta I^\theta) \hat{S} + \varepsilon \hat{V} - \beta S^\theta \hat{I} \\ \frac{d\hat{V}}{dt} &= p \hat{S} - (\beta \sigma I^\theta + \mu + \varepsilon) \hat{V} - \beta \sigma V^\theta \hat{I} \\ \frac{d\hat{E}}{dt} &= \beta I^\theta \hat{S} + \beta \sigma I^\theta \hat{V} - (\mu + \gamma) \hat{E} + \beta (S^\theta + \sigma V^\theta) \hat{I} + (1 - k) \delta \hat{T} \\ \frac{d\hat{I}}{dt} &= \gamma \hat{E} - (\mu + \alpha_1 + \xi) \hat{I} + k \delta \hat{T} \\ \frac{d\hat{T}}{dt} &= \xi \hat{I} - (\mu + \alpha_2 + \delta) \hat{T}, \end{aligned} \quad (2)$$

dengan  $\hat{S} = S - S^\theta$ ,  $\hat{V} = V - V^\theta$ ,  $\hat{E} = E - E^\theta$ ,  $\hat{I} = I - I^\theta$ , dan  $\hat{T} = T - T^\theta$ .

#### 4.1 Kestabilan titik kesetimbangan $P_0$

Pada titik kesetimbangan  $P_0$ , dari (2) diperoleh persamaan karakteristik  $(\lambda^2 + (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$ , dengan

$$A_a = (\mu + \gamma), \quad B = (\mu + \alpha_1 + \xi), \quad C = (\mu + \alpha_2 + \delta) \quad \text{dan} \quad a_1 = A_a + B + C, \quad a_2 = A_a C + A_a B + BC - k\delta\xi - \gamma\beta(S_0 + \sigma V_0), \quad a_3 = A_a BC - A_a k\delta\xi - (S_0 + \sigma V_0)\gamma\beta C - (1 - k)\delta\gamma\xi.$$

Dengan menguraikan persamaan  $(\lambda^2 - (2\mu + p + \varepsilon)\lambda + \mu^2 + \mu\varepsilon + p\mu) = 0$  diperoleh  $\lambda_1 = -\mu$  dan  $\lambda_2 = -(\mu + p + \varepsilon)$ . Syarat kestabilan akan terpenuhi jika nilai dari  $\lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Untuk mengetahui tanda dari  $\lambda_3, \lambda_4$ , dan  $\lambda_5$  digunakan kriteria Routh-Hurwitz, pada persamaan  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  yaitu  $a_1 = 3\mu + \gamma + \alpha_1 + \xi + \alpha_2 + \delta > 0$ , dan kondisi Routh-Hurwitz kedua yaitu

$$D2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (A_a + B + C)(A_a C + A_a B + BC - k\delta\xi - \gamma\beta(S_0 + \sigma V_0)) - (A_a BC - A_a k\delta\xi - (S_0 + \sigma V_0)\gamma\beta C - (1 - k)\delta\gamma\xi) > 0. \quad (3)$$

Karena rumitnya ekspresi persamaan (3) maka hanya dapat disimpulkan bahwa  $P_0$  stabil jika persamaan (3) terpenuhi.

#### 4.2 Kestabilan titik kesetimbangan endemi

Pada titik kesetimbangan  $P^*$ , dari persamaan (2) diperoleh persamaan karakteristik  $\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0$ , dengan

$$b_1 = D + F + A_a + B + C$$

$$b_2 = (CB + A_a B + AC - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V) + (D + F)(C + B + A_a) + (DF - p\varepsilon))$$

$$b_3 = A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta + (D + F)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V)) + (DF - p\varepsilon)(C + B + A_a) + \gamma\beta S\beta I + \gamma\beta\sigma V\beta\sigma I$$

$$b_4 = [(D + F)(A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta + (DF - p\varepsilon)(CB + A_a B + A_a C - k\xi\delta - \gamma\beta(S + \sigma V))) + \gamma\beta SC\beta I + (p\beta\sigma I + \beta IF)\gamma\beta S + C\gamma\beta\sigma V\beta\sigma I + \gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon)]$$

$$b_5 = (DF - p\varepsilon)(A_a BC - \gamma\beta(S + \sigma V)C - (1 - k)\delta\xi\gamma - A_a k\xi\delta) + \gamma\beta SC(p\beta\sigma I + \beta IF) + C\gamma\beta\sigma V(D\beta\sigma I + \beta I\varepsilon)$$

$$D = \mu + p + \beta I$$

$$F = \mu + \varepsilon + \beta\sigma.$$

Titik kesetimbangan  $P^*$  stabil jika memenuhi kondisi Routh-Hurwitz, yaitu

$$b_1 > 0, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Untuk  $b_1$  didapatkan  $5\mu + p + \beta I + \varepsilon + \beta\sigma I + \gamma + \mu + a_1 + \xi + a_2 + \delta > 0$ . Untuk syarat kedua dan ketiga, diperoleh ekspresi persamaan yang sangat rumit sehingga maka hanya dapat disimpulkan bahwa  $P^*$  stabil jika  $b_1 b_2 - b_3 > 0$  dan  $(b_1 b_2 b_3 + b_1 b_5) - (b_1 b_1 b_4 + b_3 b_3) > 0$  terpenuhi.

## 5. SIMULASI NUMERIK

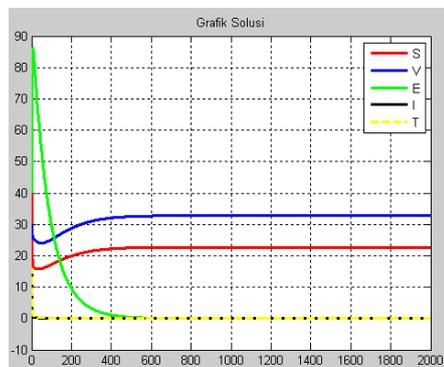
Simulasi numerik dilakukan untuk 3 kasus, yaitu  $R_0 < 1$ ,  $R_0 = 1$ , dan  $R_0 > 1$ . Parameter – parameter yang digunakan pada ketiga kasus tersebut di berikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter yang digunakan untuk simulasi numerik

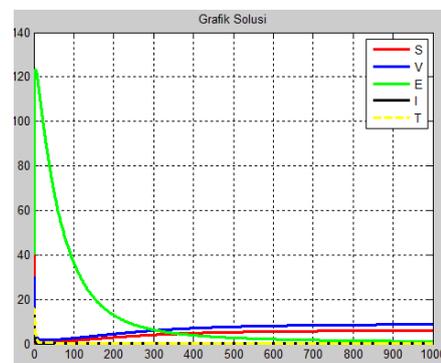
Parameter	Nilai Parameter		
	$R_0 < 1$	$R_0 = 1$	$R_0 > 1$
$A$	55.496	15,9524459	55.496
$\mu$	0.0143	0.0143	0.0143
$q$	0.6	0.6	0.6
$k$	0.3	0.3	0.3
$\sigma$	0.2	0.2	0.2
$p$	0.05	0.05	0.05
$\varepsilon$	0.03	0.03	0.03

Parameter	Nilai Parameter		
	$R_0 < 1$	$R_0 = 1$	$R_0 > 1$
$\delta$	0.5	0.5	0.5
$\alpha_1$	0.3	0.3	0.3
$\alpha_2$	0.05	0.05	0.05
$\beta$	0.05	0.05	0.05
$\gamma$	0.00368	0.00368	0.5
$\xi$	0.9	0.9	0.9

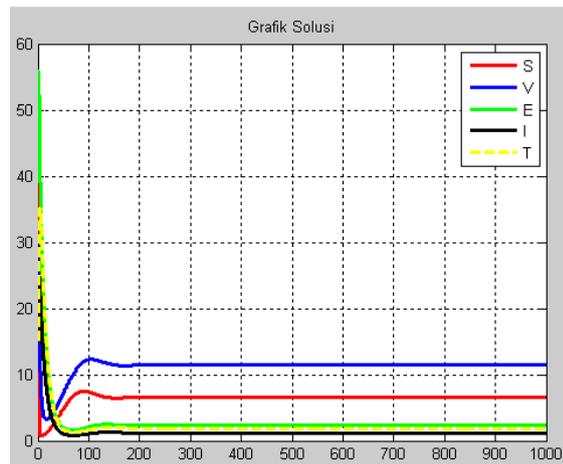
Dengan menggunakan parameter-parameter tersebut diperoleh kurva solusi yang dapat dilihat pada Gambar 1, 2, dan 3.



Gambar 1.  $R_0 = 0.3479 < 1$



Gambar 2.  $R_0 = 1$



Gambar 3.  $R_0 = 3.28989 > 1$

Pada Gambar 1, nilai  $S_0$  adalah 22.7045 dan nilai  $V_0$  adalah 32.7915. Pada Gambar 1 dapat diketahui bahwa kurva solusi  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $T(t)$  dengan nilai awal (50,30,40,15,15) akan menuju ke titik kesetimbangan  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$ . Dengan kata lain, titik  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$  stabil. Hal ini di tunjukkan dengan kurva subpopulasi  $E$ ,  $I$ , dan  $T$  yang menuju nol atau habis, sedangkan subpopulasi  $S$  dan subpopulasi  $V$  jumlahnya menuju ke 22.7045 dan ke 32.7915. Pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa tidak terdapat penyebaran penyakit pada populasi tersebut.

Pada Gambar 2 yaitu  $R_0 = 1$ , nilai  $H(0) = 0$ . Karena  $H(I)$  monoton turun, maka tidak terdapat  $I^*$  yang memenuhi  $H(I^*) = 0$ . Jadi pada kasus ini hanya terdapat titik kesetimbangan  $P_0(22.7045, 32.7915, 0, 0, 0)$ .

Kestabilan titik kesetimbangan  $P^*$  dapat dilihat pada Gambar 3. Kurva solusi  $S(t)$ ,  $V(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $T(t)$  dengan nilai awal (50,30,40,15,15) menuju ke titik kesetimbangan  $P^*(6.59658, 11.49098, 2.34566, 1.20282, 1.91837)$ . Dengan kata lain, titik  $P^*(6.59658, 11.49098, 2.34566, 1.20282, 1.91837)$  stabil. Pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa terdapat penyebaran penyakit pada populasi tersebut. Hal ini dapat dilihat dari subpopulasi  $E$ ,  $I$ , dan  $T$  yang menuju titik 2.34566, 1.20282, dan 1.91837.

## 6. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dalam tulisan ini dapat ditarik kesimpulan bahwa model epidemi dengan vaksinasi dan pengobatan tidak lengkap berupa sistem otonomus nonlinier dengan 5 variabel dan 13 parameter. Pada model ini diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan nonendemi dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan nonendemi bersifat stabil jika  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  dan titik kesetimbangan endemi bersifat stabil jika  $R_0 > 1$  serta memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

## DAFTAR PUSTAKA

- Huo, H. dan Feng, L. (2011), Global Stability of an Epidemic Model with Incomplete Treatment and Vaccination, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012, hal. 1-14.
- Li, M.Y., Smith, H.L. dan Wang, L., (2001), Global Dynamic of an SEIR Epidemic Model With Vertical Transmission, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 62(1), hal. 58-69.