J. Kaunia Vol. X No. 1, April 2014/1435: 30-35
ISSN 1829-5266 (print) ISSN 2301-8550 (online)

HUKUM NEWTON TENTANG GERAK DALAM RUANG FASE TAK KOMUTATIF

Joko Purwanto

Program Studi Pendidikan Fisika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
* Keperluan korespondensi, email: jkp_wanto@yahoo.com

Abstract

In this paper, the Newton's law of motions in a noncomutative phase space has been investigated. Its show that correction to the Newton's first and second law appear if we assume that the phase space has symplectic structure consistent with the rules of comutation of the noncomutative quantum mechanics. In the free particle and harmonic oscillator case the equations of motion are derived on basis of the modified Newton's second law in a noncomutative phase space.

Keyword**:** *Noncomutative geometry, Newton's law, free particle, harmonic oscillator.*

PENDAHULUAN

Sir Isaac Newton (1964-1772) dalam karyanya ***Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*** menyatakan tiga hukum tentang gerak benda.

I. Setiap benda akan terus berada pada keadaan diam atau bergerak dengan kelajuan tetap sepanjang lintasan lurus jika tidak dipaksa untuk merubah keadaan geraknya itu oleh gaya-gaya yang bekerja padanya (**Hukum I Newton**).
II. Resultan gaya yang bekerja pada suatu benda akan mengakibatkan terjadinya perubahan momentum. Perubahan momentum tiap satu satuan waktu yang dialami oleh benda tersebut berbanding lurus dengan resultan gaya yang bekerja padanya (**Hukum II Newton**).
III. Jika suatu benda mengerjakan gaya (aksi) pada benda lain, maka benda yang dikenai aksi akan melakukan gaya (reaksi) pada benda pertama yang besarnya sama tetapi arahnya berlawanan gaya aksi (**Hukum III Newton**).

Ketiga hukum Newton tersebut berlaku dalam geometri ruang yang komutatif. Timbul pertanyaan besar apakah hukum-hukum Newton tersebut masih berlaku manakala geometri ruang dan waktu tak lagi komutatif. Dalam artikel ini akan ditelaah hukum Newton tentang gerak tersebut dalam ruang fase klasik tak komutatif atau lebih dikenal dengan *noncomutative geometry* (NCG). Dalam satu dekade terakhir kajian tentang NCG dalam fisika mendapat perhatian serius dari para fisikawan. NCG memiliki peran penting dalam mengungkap struktur ruang waktu pada skala amat sangat kecil (skala Planck). Skala Planck secara numerik diberikan oleh panjang Planck $l_P \approx 10^{-33}$ cm dan interval waktu Planck $t_P \approx 10^{-44}$ detik. Gagasan tentang NCG pada skala Planck kali pertama dikemukakan oleh Snyder pada tahun 1947 [1]. Snyder menyatakan bahwa invariansi Lorentz tidak mensyaratkan ruang waktu sebagai kontinuum. Ruang waktu yang diskret menyebabkan ruang waktu tidak lagi komutatif. Dengan kata lain, pada skala ini ruang waktu tidak lagi kontinu melainkan diskrit.

Mengingat data eksperimen mengenai ruang waktu pada skala kecil atau pada energi tinggi sangat terbatas maka fisikawan berusaha menyusun model hukum alam untuk menggambarkan ketakkomutatifan ruang waktu. Model yang dipakai biasanya merujuk pada kaitan komutasi

$$\begin{aligned} \left[\hat{x}_i, \hat{x}_j\right] &= i\hbar\theta_{ij} \\ \left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

dengan θ_{ij} adalah tensor yang bernilai riil dan antisimetris terhadap pertukaran indeks sedangkan δ_{ij} adalah delta kronecker. Konsep NCG tidak hanya terbatas pada observabel ruang waktu tetapi dapat diperluas pada variabel ruang fase klasik sehingga memunculkan gagasan mekanika klasik dalam ruang fase tak komutatif.

Juan M. Romero, dkk [2], telah menunjukkan bahwa ruang fase klasik memiliki struktur simplektik yang konsisten dengan aturan komutasi dalam mekanika kuantum tak komutatif. Selanjutnya Wei, G.F., dkk [3] memperluas kajian Juan M. Romero dengan menambahkan momentum linier sebagai variabel tak komutatif. Dalam tulisan ini akan ditelaah kembali konsep mekanika klasik dalam ruang fase tak komutatif yang disampaikan sebelumnya oleh Juan M. Romero, dkk serta Wei, G.F., dkk dengan menitikberatkan pada hukum Newton tentang gerak.

HUKUM II NEWTON DALAM RUANG FASE TAK KOMUTATIF

Ruang fase klasik direpresentasikan oleh himpunan $\{x_i, p_i\}$ dengan $i, j = 1, 2, ..., n$, x_i adalah koordinat umum dan p_i konjugat momentum. Melalui penguantuman kanonis

$$\left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2}$$

dengan $\hat{x}_i = x$ operator posisi dan $\hat{p}_j = -i\hbar\nabla$ operator momentum linier. Aturan komutasi persamaan (2) menginduksi terbentuknya aljabar fungsi-fungsi licin (*smooth functions*) $\left(C^\infty\left(R^2, C\right), +, *\right)$ dengan $*$ adalah perkalian Moyal (*Moyal product*) [4]. Perkalian Moyal didefinsikan [5]

$$\left(f * g\right)\left(x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^{ab}\partial_a\partial_b\right) f\left(x\right) g\left(y\right)\Big|_{x=y} \tag{3}$$

dengan $f, g \in C^\infty\left(R^2, C\right)$ dan $a, b = 1, 2, ..., 2n$. Bilangan $2n$ menunjukkan dimensi ruang fase klasik. Besaran α_{ab} adalah matrik riil yang menunjukkan struktur simplektik dalam mekanika klasik

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} \theta_{ij} & \delta_{ij} + \sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \sigma_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

dengan θ_{ij} dan β_{ij} merupakan parameter ketakkomutatifan posisi dan momentum berupa tensor yang bernilai riil dan antisimetris terhadap pertukaran indeks.

Jika aturan komutasi (1) dideformasi sedemikian sehingga berlaku [6]

$$\begin{aligned} \left[\hat{x}_i, \hat{x}_j\right] &= i\hbar\theta_{ij} \\ \left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] &= \hbar_{\text{eff}}\delta_{ij}\ , \\ \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] &= i\hbar\beta_{ij} \end{aligned} \tag{5}$$

dengan $h_{eff} = \hbar(1+\xi)$ adalah konstanta Planck efektif dan $\xi = \frac{\mathrm{Tr}[\theta\beta]}{4\hbar}$. Dapat ditunjukkan bahwa persamaan (5) sesuai dengan komutator posisi dan momentum dalam mekanika kuantum jika diset $\xi \ll 1$. Dalam konsep NCG ξ merupakan orde kedua parameter θ dan β sehingga nilainya $\xi \ll 1$. Aturan komutasi, persamaan (5), inilah yang nantinya digunakan untuk mendapatkan hubungan posisi dan momentum dalam ruang fase tak komutatif. Aturan komutasi dalam mekanika kuantum $[\ ,\ ]$ dapat didekati menggunakan Kurung Poisson $\{\ ,\ \}_{KP}$ berdasarkan persamaan

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{f}, \hat{g}\right] \rightarrow \left\{\tilde{f}, \tilde{g}\right\}_{KP}, \tag{6}$$

Tanda $(\sim)$ untuk membedakan variabel dalam ruang fase komutatif dan tak komutatif. Varibel dalam ruang fase tak komutatif dituliskan $\left\{\tilde{f}, \tilde{g}\right\}$. Menggunakan persamaan (6), persamaan (5) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\right\}_{KP} &= \theta_{ij} \\ \left\{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\right\}_{KP} &= \delta_{ij}\ , \\ \left\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\right\}_{KP} &= \beta_{ij} \end{aligned} \tag{7}$$

Secara umum, definisi kurung Poisson diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{KP} = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\left\{x_i, p_j\right\}_{KP} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\left\{x_i, x_j\right\}_{KP} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\left\{p_i, p_j\right\}_{KP} \end{aligned} \tag{8}$$

Kurung Poisson memiliki sifat-sifat yang sama dengan komutator dalam mekanika kuantum, yaitu linier, anti simetri, memenuhi aturan Leibniz dan identitas Jacobi. Subtitusi persamaan (7) kedalam persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned} \left\{\tilde{f}, \tilde{g}\right\}_{KP} = &\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{p}_j} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{x}_j}\right) \\ &+ \theta_{ij}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{x}_j} + \beta_{ij}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{p}_j}, \end{aligned} \tag{9}$$

Tenaga total atau Hamiltonan sistem fisis mekanika klasik (mekanika Newton) diberikan oleh persamaan

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + V(x_i), \tag{10}$$

dengan $V(x_i)$ adalah medan potensial skalar. Persamaan gerak Hamiltonan sistem mekanika klasik dengan struktur simplektik seperti persamaan (4) dapat dituliskan

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m} + \theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad (11)$$

dan

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \beta_{ij}\dot{x}_j. \qquad (12)$$

Dari persamaan (11) dan (12) dapat diperoleh persamaan

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \beta_{ij}\dot{x}_j + \theta_{ij} m \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right). \qquad (13)$$

Persamaan (13) di atas mirip dengan persamaan hukum II Newton,

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{x}}_i. \qquad (14)$$

Persamaan (13) merupakan modifikasi hukum II Newton dalam ruang fase komutatif. Suku kedua persamaan (13) muncul akibat ketakkomutatifan variabel momentum linier. Sedangkan suku ketiga muncul sebagai akibat ketakkomutatifan posisi. Di samping itu, tampak bahwa dalam NCG hukum II Newton tidak hanya bergantung pada ketakkomutatifan posisi dan momentum, yang dinyatakan oleh faktor θ_{ij} dan β_{ij}, tetapi juga bergantung pada variasi medan potensial. Artinya gaya eksternal yang diberikan kepada sistem fisis akan menyebabkan gangguan (*perturbation*) dalam ruang yang mempengaruhi persamaan gerak sistem.

HUKUM I NEWTON: PARTIKEL BEBAS DALAM RUANG FASE TAK KOMUTATIF

Untuk menelaah hukum I Newton dalam ruang fase tak komutatif, ditinjau partikel bebas dengan medan potensial

$$V(x_i) = 0 \qquad (15)$$

Hukum I Newton menyatakan bahwa suatu benda akan cenderung diam atau bergerak lurus beraturan bilamana resultan gaya yang bekerja pada benda tersebut sama dengan nol. Secara matematis, hukum I Newton dituliskan

$$\sum \mathbf{F} = 0. \qquad (16)$$

Artinya percepatan benda akan konstan apabila resultan gaya luar yang bekerja pada benda tersebut sama dengan nol. Untuk gaya konservatif berlaku $F = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$.

Subtitusikan persamaan (15) kedalam persamaan (13) diperoleh

$$m\ddot{x}_i = \beta_{ij}\dot{x}_j \qquad (17)$$

Persamaan (17) adalah persamaan gerak partikel bebas dalam ruang fase tak komutatif dimana resultan gaya luar yang bekerja pada partikel sama dengan nol. Percepatan partikel bebas dalam ruang fase tak komutatif tidak sama dengan nol sebagai mana persamaan (16) tetapi sebanding dengan faktor ketakkomutatifan momentum linier, β_{ij}. Kenyataan ini tentu saja berbeda dengan hukum I Newton dalam ruang fase komutatif, yaitu sama dengan nol apabila resultan gaya luar yang bekerja pada partikel sama dengan nol. Dengan menggunakan simbol Levi-Civita, faktor ketakkomutatifan momentum linier dapat dituliskan

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij}^k \beta_k. \qquad (18)$$

Jika persamaan (18) disubtitusikan kedalam persamaan (17) diperoleh

$$m\ddot{x}_i = \varepsilon_{ij}^k \dot{x}_k \beta_j = \left(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}\right)_i \qquad (19)$$

dengan $\boldsymbol{\beta} = \beta_j$. Persamaan (19) ekuivalen dengan persamaan gerak partikel bermuatan q dalam medan magnet seragam $\mathbf{B}$,

$$m\ddot{x}_i = q\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)_i \qquad (20)$$

Hal ini dapat dipahami bahwa efek faktor ketakkomutatifan momentum linier dalam NCG setara dengan efek medan magnet dalam ruang waktu biasa.

PERSAMAAN GERAK OSI-LATOR HARMONIK DALAM RUANG FASE TAK KOMUTATIF

Osilator harmonik memiliki tempat yang istimewa baik dalam kajian mekanika kuantum klasik maupun mekanika kuantum NCG. Potensial osilator harmonik diberikan oleh persamaan

$$V\left(x_i\right) = \frac{1}{2}\sum_i k_i x_i^2 \qquad (21)$$

dengan k_i adalah konstanta pegas. Untuk memudahkan, dalam artikel ini diambil $k_i = k$ konstan. Subtitusi persamaan (21) kedalam persamaan (13) diperoleh

$$m\ddot{x}_i = -kx_i + \beta_{ij}\dot{x}_j + \theta_{ij} mk\dot{x}_j \,. \qquad (22)$$

Persamaan (22) merupakan persamaan gerak osilator harmonik dalam ruang fase tak komutatif. Suku kedua dan ketiga persamaan (22) adalah koreksi terhadap persamaan hukum II Newton untuk osilator harmonik dalam ruang biasa. Dua suku tambahan tersebut dapat dipandang sebagai gaya redaman akibat ketidak-komutatifan ruang dan waktu.

Selanjutnya hendak ditinjau tenaga total osilator harmonik dua dimensi dalam ruang fase tak komutatif. Tenaga total osilator harmonik dua dimensi diberikan oleh persamaan

$$H = \frac{1}{2m}\left(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2\right) + V\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) \qquad (23)$$

dengan $\left\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \tilde{p}_2\right\}$ variabel posisi dan momentum. Transformasi linier dari ruang fase komutatif $\left\{x_1, p_1, x_2, p_2\right\}$ menuju ruang fase tak komutatif $\left\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \tilde{p}_2\right\}$ diberikan oleh persamaan [6]

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} p_j \qquad (24)$$

dan

$$\tilde{p}_i = p_i + \frac{1}{2}\beta_{ij} x_j \qquad (25)$$

Variabel posisi dan momentum dalam ruang fase komutatif memenuhi kaitan

$$\left\{x_i, x_j\right\}_{KP} = 0, \qquad \left\{p_i, p_j\right\}_{KP} = 0 \qquad (26)$$

Subtitusi persamaan (24-25) kedalam persamaan (23) diperoleh

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + \beta x_2 p_1 - \beta x_1 p_2\right) \\ & + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2 + \theta x_2 p_1 - \theta x_1 p_2\right) \end{aligned} \qquad (27)$$

Persamaan (26) adalah Hamiltonan osilator harmonik dua dimensi dalam ruang fase tak komutatif dinyatakan dalam variabel posisi dan momentum ruang fase komutatif. Persamaan gerak osilator harmonik diperoleh dengan menggunakan persamaan (11) dan (12),

$$\dot{x}_1 = \left\{x_1, H\right\} = \frac{p_1}{m} + \frac{1}{2m}\beta x_2 + \frac{1}{2}k\theta x_2 \qquad (28)$$

dan

$$\dot{p}_1 = \{p_1, H\} = -kx_1 + \frac{1}{2}k\theta\dot{x}_2 + \frac{1}{2}k\theta m\dot{x}_2. \quad (29)$$

Dari persamaan (28-29) diperoleh

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \beta\dot{x}_2 + \theta km\dot{x}_2 \quad (30)$$

Dengan cara sama diperoleh persamaan

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + \beta\dot{x}_1 + \theta km\dot{x}_1 \quad (31)$$

Persamaan (30) dapat juga diperoleh dari persamaan (22) dengan mengambil nilai $i=1$ dan persamaan (31) dapat diperoleh dengan mengambil nilai $i=2$. Persamaan (30) dan (31) menunjukkan bahwa hukum II Newton untuk osilator harmonik konsisten dengan rumusan mekanika klasik yang diperoleh melalui modifikasi Kurung Poisson dan tranformasi linier posisi dan momentum dalam ruang fase tak komutatif $\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \tilde{p}_2\}$ menuju ruang fase komotatif $\{x_1, p_1, x_2, p_2\}$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Telah diperoleh rumusan hukum Newton tentang gerak dalam ruang fase tak komutatif. Koreksi terhadap hukum II Newton dan Hukum I Newton muncul akibat faktor ketakkomutatifan posisi dan momentum. Medan potensial skalar dalam ruang fase tak komutatif menyebabkan gangguan (*perturbation*) yang mempengaruhi gerak sistem fisis. Ketakkomutatifan momentum linier menyebabkan percepatan gerak partikel tidak lagi konstan meskipun resultan gaya luar yang bekerja pada benda (partikel bebas) sama dengan nol. Hasil ini sangat berbeda dengan hukum I Newton. Pada kasus osilator harmonik dua dimensi ketakkomutatifan posisi dan momentum memunculkan gaya redaman pada persamaan gerak osilator. Selain bergantung pada faktor ketakkomutatifan posisi dan momentum, persamaan gerak osilator harmonik dalam ruang fase tak komutatif juga bergantung pada gaya eksternal yang bekerja pada sistem.

Artikel ini telah membahas hukum I Newton dan hukum II Newton dalam ruang fase tak komutatif tetapi belum memasukkan hukum III Newton tentang aksi-reaksi dalam ruang fase tak komutatif. Dalam ruang fase tak komutatif diharapkan tetap berlaku hukum aksi-reaksi namun diperlukan analisis yang lebih mendalam untuk mengkaji hukum III Newton tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Snyder, H., *Quantized Space Time*, Physical Review **71**, 38 (1947)

[2] Romero, J.M., dkk., 2003, *Newton's Second Law on Noncomutative Geometry*, Physics Letter A, **310**:9

[3] Wei, G.F., dkk, 2008, *Classical Mechanics in non-comutative Phase Space*, Chinnes Physics C, **32**:5 hal 338-341.

[4] Siahaan, T., 2004, Medan Klein Gordon dan Medan Dirac Pada Ruang Minkowski Tak Komutatif, Skripsi, UGM Yogyakarta.

[5] Moyal, J.E., 1949, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Cambridge Phil.Soc., Hal 45,99

[6] Bertolami O, Rosa J. G., 2005, *Noncomutative Gravitational Quantum Well*, Physical Review D, **72**: 025010