ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 4, Nomor 4, Tahun 2015, Halaman 977-986
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

PENERAPAN METODE *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP) PADA MODEL PENDUGA AREA KECIL DALAM PENDUGAAN PENGELUARAN PER KAPITA DI KABUPATEN BREBES

Rahayu Ningtyas[1], Rita Rahmawati[2], Yuciana Wilandari[3]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
[2,3]Staff Pengajar Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
rahayuningtyas168@yahoo.com,

ABSTRACT

The coming of a policy about regional autonomy makes district government's choices of strategy and policy become crucial and important for it's district's development and prosperity. Indicator that can states this district development is Human Development Index (HDI). One of dimension that being used to predict the value of HDI is the dimensions of decent living, which can be shown from expenditure per capita. Should the samples of expenditure per capita are less than needed, it can cause difficulty to analyze the value of HDI on next level, which is sub-districal HDI. Direct estimaton only will not give enough validity for the results which can cause the increasing value for it's variance. Another method that can be used is small area estimation (SAE) with Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) method. This estimation uses the information from it's surrounding areas that correlates with the subject's parametrics. The evaluation for the results is done by comparing the value of Relative Root Mean Square Error (RRMSE) from a direct estimation with the RRMSE from an indirect estimation, which is the EBLUP method. Results from EBLUP estimation is better with average of RRMSE of 7,219% than direct estimation's average of RRMSE with 9,361%.

Keywords : Expenditure per capita, Small Area Estimation (SAE), Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP)

1. PENDAHULUAN

Adanya kebijakan otonomi daerah yang menyatakan bahwa setiap pemerintahan daerah memiliki kewenangan untuk mengelola daerahnya sendiri, menyebabkan pemerintah daerah memiliki tanggung jawab yang lebih dalam meningkatkan kesejahteraan masyarakat di setiap daerahnya. Strategi dan kebijakan yang diambil pemerintah daerah sangat menentukan kemajuan pembangunan dan kesejahteraan yang terjadi dalam suatu wilayah. Salah satu indikator yang mengukur hasil pembangunan di suatu wilayah adalah Indeks Pembangunan Manusia (IPM).

Pengeluaran per kapita merupakan salah satu komponen yang digunakan dalam perhitungan IPM. Pengeluaran per kapita merupakan indikator yang digunakan dalam mengukur dimensi kehidupan yang layak. Untuk mengestimasi pengeluaran per kapita tiap kecamatan tidak dapat dilakukan dengan mudah karena sampel yang tersedia terlalu kecil sehingga pendugaan pengeluaran per kapita yang dihasilkan tidak cukup menggambarkan pada beberapa kecamatan. Kurang atau tidak adanya data atau informasi komponen penyusun IPM termasuk nilai pengeluaran per kapita pada tingkat kecamatan merupakan salah satu penyebab sulitnya mendapatkan informasi IPM pada tingkat kecamatan. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan mengoptimalkan data yang tersedia dengan menggunakan metode penduga area kecil.

Penduga area kecil merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter sub populasi dengan ukuran sampel kecil. Pendugaan dalam metode penduga area kecil didasarkan pada model dan merupakan pendugaan tidak langsung. Teknik pendugaan ini memanfaatkan data penyerta yang didapat dari area besar untuk menduga variabel yang menjadi perhatian pada area yang lebih kecil (Rao, 2003). Oleh karena itu dibutuhkan informasi tambahan dari variabel yang memiliki hubungan dengan variabel yang sedang diamati yang disebut sebagai variabel penyerta. Penduga area kecil memiliki beberapa macam pendekatan, di antaranya adalah *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Empirical Bayes* (EB), dan *Hierarchical Bayes* (HB). Metode EBLUP merupakan teknik penyelesaian model pengaruh campuran yang meminimumkan *Mean Square Error* (MSE) yang dihasilkan dengan asumsi komponen varian yang telah diketahui. EBLUP merupakan metode yang lebih sederhana karena tidak memerlukan penentuan sebaran prior atau posterior seperti metode EB dan HB.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Definisi Pengeluaran Perkapita

Menurut Badan Pusat Statistik (BPS, 2015), pengeluaran rata-rata per kapita sebulan adalah biaya yang dikeluarkan untuk konsumsi semua anggota rumah tangga selama sebulan dibagi dengan banyaknya anggota rumah tangga. Rumah tangga adalah seorang atau sekelompok orang yang mendiami sebagian atau seluruh bangunan fisik atau sensus, dan biasanya tinggal bersama serta makan dari satu dapur. Sedangkan pengertian anggota rumah tangga (ART) adalah semua orang yang biasanya bertempat tinggal di suatu rumah tangga (suami atau istri, anak, menantu, cucu, orang tua atau mertua, keluarga lain, pembantu rumah tangga atau ART lainnya), baik yang berada di rumah tangga tersebut maupun sementara tidak ada pada waktu pencacahan.

Pengeluaran per kapita sebulan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathrm{y} = \frac{t}{q} \qquad (1)$$

dimana:
y = pengeluaran per kapita
t = pengeluaran rumah tangga sebulan
q = jumlah anggota rumah tangga

2.2. Profil Kabupaten Brebes

Kabupaten Brebes merupakan pintu gerbang utama, yaitu pintu masuk ke Provinsi Jawa Tengah jika masuk dari provinsi terdekatnya yaitu Provinsi Jawa Barat. Kabupaten Brebes merupakan kabupaten dengan jumlah penduduk paling banyak sebesar 1.764.648 jiwa dan luas wilayah sekitar 1.662,96 Km^2 terbagi atas 17 kecamatan dengan 297 desa atau kelurahan yang membentang dari ujung selatan sampai ujung utara Pulau Jawa (BPS, 2014). Meskipun begitu, pada tahun 1996-2013 Kabupaten di Jawa Tengah dan paling luas di Jawa Tengah ke-5. Pada tahun 2013. Jumlah penduduk Kabupaten Brebes Brebes masih menjadi kabupaten dengan nilai IPM terendah tingkat kota atau kabupaten di Provinsi Jawa Tengah walaupun mengalami kenaikan nilai IPM setiap tahunnya.

2.3. Uji Asumsi Normalitas

Untuk melakukan uji asumsi normalitas digunakan Uji *Kolmogorov Smirnov*. Uji *Kolmogorov Smirnov* dilakukan dengan hipotesis, statistik uji dan kriteria uji sebagai berikut (Daniel, 1989):

i. Hipotesis :
   H_0 : F(x) = F_0(x) (Data berdistribusi normal)
   H_1 : F(x) ≠ F_0(x) (Data tidak berdistribusi normal)
ii. Statistik Uji :
   $$D = Sup_x \, |S(x) - F_0(x)| \qquad (2)$$

dimana:
S(x) = fungsi peluang kumulatif data sampel.
$F_0(x)$ = fungsi peluang kumulatif dari distribusi normal.
Sup = Supremum yaitu batas atas terkecil
Apabila kedua fungsi tersebut disajikan secara grafik maka D adalah jarak vertikal terjauh antara S(x) dan $F_0(x)$.

iii. Kriteria Uji :
Tolak H_0 jika sig < α atau D > D^* (α)
dimana $D^*(\alpha)$ merupakan nilai kritis yang diperoleh dari tabel "*Kolmogorov-Smirnov*".

2.4. Korelasi *Pearson Product Moment* (PPM)

Korelasi Pearson menyatakan ada atau tidaknya hubungan yang signifikan antara satu variabel dengan variabel lainnya. Nilai korelasi Pearson antara variabel X dan Y biasanya dilambangkan dengan lambang r_{xy}. Menurut Usman dan Akbar (2008) asumsi atau persyaratan yang harus dipenuhi dalam menggunakan korelasi Pearson adalah variabel yang dihubungkan masing-masing berdistribusi normal, variabel yang dihubungkan mempunyai hubungan linier, data dipilih secara acak (*random*), data yang dihubungkan mempunyai pasangan sama dari subjek yang sama pula dan variabel yang dihubungkan merupakan data interval atau rasio.

Dengan uji hipotesis dan kriteria uji sebagai berikut:

i. Hipotesis :
H_o : $r_{xy} = 0$ (Tidak terdapat hubungan yang signifikan antara variabel X dengan variabel Y)
H_1 : $r_{xy} \neq 0$ (Terdapat hubungan yang signifikan antara variabel X dengan variabel Y)

ii. Statistik uji:
Nilai korelasi Pearson dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$r_{xy} = \frac{m\sum_{i=1}^{m} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{m} X_i)(\sum_{i=1}^{m} Y_i)}{\sqrt{\{m\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} X_i)^2\}\{m\sum_{i=1}^{m} Y_i^2 - (\sum_{i=1}^{m} Y_i)^2\}}} \quad (3)$$

dimana:
r_{xy} = Koefisien korelasi
m = Ukuran sampel
$\sum_{i=1}^{m} X_i$ = Jumlah dari pengamatan X
$\sum_{i=1}^{m} Y_i$ = Jumlah dari pengamatan Y

iii. Kriteria pengujian :
H_o ditolak jika nilai sig lebih kecil dari nilai α atau nilai $|r_{xy}|$ lebih besar sama dengan r tabel.

Menurut Hasan (2005), nilai koefisien korelasi dapat diinterpretasikan sebagai berikut:

Tabel 2. Interpretasi Nilai Korelasi X dan Y (r_{xy})

$\lvert(r_{xy})\rvert$	Interpretasi
0	Tidak ada korelasi
$0 < r_{xy} \leq 0{,}20$	Sangat rendah atau lemah sekali
$0{,}20 < r_{xy} \leq 0{,}40$	Korelasi rendah atau lemah
$0{,}40 < r_{xy} \leq 0{,}70$	Cukup berkorelasi
$0{,}70 < r_{xy} \leq 0{,}90$	Korelasi tinggi atau kuat
$0{,}90 < r_{xy} < 1$	Korelasi sangat tinggi atau kuat sekali
1	Sempurna

2.5. Metode Maksimum Likelihood (*Maximum Likelihood Estimator* / MLE)

Estimator maksimum likelihood $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ..., $\hat{\theta}_K$ akan diperoleh dengan menyamakan turunan parsial pertama fungsi likelihood $\frac{\partial L(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K)|X}{\partial \theta_k}$, ($k$ = 1,2,...,K) dengan nol dan menyelesaikan sistem persamaan tersebut (Hines dan Montgomery,1990).

Langkah-langkah untuk menentukan estimator maksimum likelihood dari θ adalah:

1. Menentukan fungsi likelihood:
   $$L(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K|X) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i|\ \theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_K) \quad (4)$$
2. Membentuk log likelihood:
   $$l(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K|X) = \ln L(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K|X) \quad (5)$$
3. Menentukan turunan pertama dari log likelihood $l(\theta)$ terhadap
   $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_K$ yaitu: $\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K|X)}{\partial \theta_k}$ k = 1,2,...,K (6)
4. Menyelesaikan persamaan $\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_K|X)}{\partial \theta_k} = 0$ (7)
   dari langkah ini didapat estimator maksimum likelihood dari θ_k yaitu $\hat{\theta}_k$

2.6. Penduga Langsung (*Direct Estimator*)

Menurut Rao (2003) dalam konteks survei, penduga dikatakan langsung apabila pendugaan terhadap parameter di suatu area hanya didasarkan pada data contoh yang diperoleh dari area tersebut sehingga penduga ini didasarkan pada model desain penarikan sampel (*design based*). Penduga langsung untuk nilai pengeluaran per kapita pada setiap kecamatan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i},\ i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n_i \quad (8)$$

dimana:

$\hat{\theta}_i$ = penduga langsung pengeluaran per kapita di kecamatan-i
y_{ij} = pengeluaran per kapita rumah tangga ke-j di kecamatan-i
n_i = jumlah rumah tangga di kecamatan-i

Untuk mengukur seberapa baik penduga langsung dapat dicari dengan nilai *Mean Square Error* (MSE), yaitu dengan rumus:

$$\text{MSE}\ (\hat{\theta}_i) = \frac{s_i^2}{n_i},\ i = 1, ..., m \quad (9)$$

dimana $s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\hat{\theta}_i - y_{ij})^2$, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n_i

Menurut Kurnia (2009), evaluasi hasil kajian menggunakan *Relative Root Mean Square Error* (RRMSE) diperoleh dengan perhitungan sebagai berikut:

$$\text{RRMSE}\ (\hat{\theta}_i) = \frac{\sqrt{\text{MSE}\ (\hat{\theta}_i)}}{\hat{\theta}_i}\ x\ 100\% \quad (10)$$

2.7. Pendugaan Area Kecil (*Small Area Estimation*)

Pendugaan Area Kecil *(Small Area Estimation)* adalah metode yang digunakan untuk menduga parameter yang berasal dari area atau sub populasi dengan ukuran sampel yang kecil. Istilah area kecil biasanya menandakan suatu area geografis kecil, seperti suatu daerah kecamatan, maupun kelurahan atau desa. Suatu area disebut kecil apabila contoh yang diambil tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil dugaan yang akurat (Rao, 2003).

Menurut Rao (2003), penduga Area Kecil dikelompokkan menjadi dua jenis model dasar yaitu model level area (*basic area level model*) dan model level unit (*basic unit level model*), dengan penjelasan sebagai berikut:

a. Model berbasis area level

Merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan variabel penyerta yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $\boldsymbol{x_i} = (x_{1i}, x_{2i, ..., } x_{pi})^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang diasumsikan mempunyai hubungan dengan $\boldsymbol{x_i}$. Variabel penyerta tersebut digunakan untuk membangun model, yaitu:

$$\theta_i = \boldsymbol{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + v_i, \quad i = 1,..., m \qquad (11)$$

dimana m adalah banyaknya area dengan $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,..., \beta_p)^T$ merupakan vektor px1 koefisien regresi untuk variabel penyerta x_i dan v_i adalah pengaruh acak area kecil yang diasumsikan berdistribusi $N(0,\sigma_v^2)$.

Estimator θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung $\hat{\theta}_i$ telah tersedia yaitu:

$$\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i, \quad i = 1, ..., m \qquad (12)$$

dengan $e_i \sim N(0, \psi i)$ dan ψ_i diketahui.

Jika model (11) dan (12) digabungkan maka akan menghasilkan model gabungan (*mixed model*) :

$$\hat{\theta}_i = \boldsymbol{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i, \quad i = 1, ..., m \qquad (13)$$

Model gabungan (*mixed model*) di atas dikenal sebagai model Fay-Heriot, dimana keragaman variabel respon di dalam area kecil diasumsikan dapat diterangkan oleh hubungan variabel respon dengan informasi tambahan (variabel penyerta) yang disebut sebagai model pengaruh tetap (*fixed effect models*). Selain itu terdapat komponen keragaman spesifik area kecil yang tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan (variabel penyerta), kemudian disebut sebagai komponen pengaruh acak area kecil (*random effect*). Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran atau model linier campuran (Kurnia, 2009)

b. Model berbasis unit level

Merupakan suatu model dimana data-data penyerta yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misal $\boldsymbol{x_i} = (x_{ij1}, x_{ij2, ..., } x_{ijp})^T$, sehingga dapat dibangun suatu model regresi tersarang:

$$y_{ij} = \boldsymbol{x_{ij}}^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_{ij}, \quad i = 1, ..., m \text{ dan, } j = 1, \dots, n_i \qquad (14)$$

dimana j adalah banyaknya rumah tangga pada area ke-i dengan $v_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ dan $e_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Model yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah model berbasis area, karena data penyerta yang digunakan merupakan data yang terdapat pada area tertentu yaitu pada level area kecamatan.

2.8. Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor)* merupakan penduga parameter yang meminimumkan *mean squared error* yang dihasilkan dengan asumsi komponen varian yang telah diketahui. Namun dalam prakteknya, komponen varian sangat sulit untuk diketahui, untuk itu diperlukan pendugaan terhadap komponen varian melalui data contoh. Metode yang dapat mensubstitusikan komponen varian yang tidak diketahui dengan nilai penduganya yaitu metode EBLUP atau *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (Rao, 2003).

Model Fay-Herriot untuk model *basic area level* (Rao, 2003) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_i &= \boldsymbol{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i, \quad i = 1,..., m \\ &= \theta_i + e_i\end{aligned} \qquad (15)$$

dimana $\boldsymbol{x_i}$ adalah vektor px1 variabel penyerta tingkat area, v_i adalah pengaruh acak area kecil dan e_i adalah error sampling. $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ dan $e_i \sim N(0, \psi_i)$ dengan varian ψ_i yang diketahui dari data, dimana v_i dan e_i saling independen.

Penduga BLUP (Rao, 2003) dari θ_i dengan asumsi σ_v^2 diketahui adalah:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i^{BLUP} &= \boldsymbol{x_i^T \tilde{\beta}} + v_i \\ &= \boldsymbol{x_i^T \tilde{\beta}} + \gamma_i(\hat{\theta}_i - \boldsymbol{x_i^T \tilde{\beta}}) \end{aligned} \quad (16)$$

dimana:

$$\gamma_i = \left(\frac{\sigma_v^2}{\psi_i + \sigma_v^2}\right)$$

$$\psi_i = \text{MSE}(\hat{\theta}_i) = \frac{s_i^2}{n_i}, i = 1, \ldots, m$$

$$\boldsymbol{\tilde{\beta}} = \boldsymbol{\tilde{\beta}}(\sigma_v^2) = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x_i x_i^T}}{(\psi_i + \sigma_v^2)}\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x_i} \hat{\theta}_i}{(\psi_i + \sigma_v^2)}\right]$$

Pada penduga BLUP masih mengandung nilai σ_v^2, karena pada metode BLUP diasumsikan bahwa σ_v^2 diketahui.

Setelah dicari nilai penduga BLUP, untuk mengukur seberapa baik penduga BLUP maka akan dicari nilai *Mean Square Error* (MSE) yaitu dengan rumus:

$$\text{MSE}(\tilde{\theta}_i^{BLUP}) = g_{1i}(\sigma_v^2) + g_{2i}(\sigma_v^2) \quad (17)$$

dimana:

$$g_{1i}(\sigma_v^2) = \frac{\sigma_v^2 \psi_i}{(\psi_i + \sigma_v^2)} = \gamma_i \psi_i$$

$$g_{2i}(\sigma_v^2) = (1 - \gamma_i)^2 \boldsymbol{x_i}^T \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x_i x_i^T}}{(\psi_i + \sigma_v^2)}\right]^{-1} \boldsymbol{x_i}$$

Dalam prakteknya varian pengaruh acak (σ_v^2) tidak diketahui, sehingga harus diduga terlebih dahulu. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga varian pengaruh acak (σ_v^2) adalah metode *Maximum Likelihood* (ML). Pendugaan varian pengaruh acak (σ_v^2) dengan metode *Maximum Likelihood* (ML) didapatkan persamaan iterasi Newton Raphson (Rao, 2003) sebagai berikut:

$$\sigma_v^{2(a+1)} = \sigma_v^{2(a)} + [\mathfrak{I}(\sigma_v^{2(a)})]^{-1} s(\boldsymbol{\tilde{\beta}}^{(a)}, \sigma_v^{2(a)}) \quad (18)$$

dimana:

$$\mathfrak{I}(\sigma_v^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2}$$

$$s(\boldsymbol{\tilde{\beta}}^{(a)}, \sigma_v^2) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma_v^2 + \psi_i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(\hat{\theta}_i - \boldsymbol{x_i^T \beta})^2}{(\sigma_v^2 + \psi_i)^2}$$

Kemudian Nilai $\sigma_v^{2(a+1)}$ dapat diambil sebagai penduga dari $\hat{\sigma}_v^2$ jika nilai $\sigma_v^{2(a+1)} = \sigma_v^{2(a)}$. Setelah nilai $\hat{\sigma}_v^2$ disubstitusi ke dalam penduga BLUP, maka akan diperoleh penduga baru yang disebut penduga EBLUP (Rao, 2003) yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \boldsymbol{x_i^T \hat{\beta}} + \hat{\gamma}_i(\hat{\theta}_i - \boldsymbol{x_i^T \hat{\beta}}) \quad (19)$$

dimana:

$$\hat{\gamma}_i = \left(\frac{\hat{\sigma}_v^2}{\psi_i + \hat{\sigma}_v^2}\right)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(\sigma_v^2) = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x_i x_i^T}}{(\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)}\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x_i} \hat{\theta}_i}{(\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)}\right]$$

Untuk mengukur seberapa baik penduga EBLUP maka akan dicari nilai *Mean Square Error* (MSE), yaitu dengan rumus:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_i^{EBLUP}) = g_{1i}(\hat{\sigma}_v^2) + g_{2i}(\hat{\sigma}_v^2) + 2g_{3i}(\hat{\sigma}_v^2) \quad (20)$$

dimana:

$g_{1i}\,(\hat{\sigma}_v^2) = \frac{\hat{\sigma}_v^2 \psi_i}{(\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)} = \hat{\gamma}_i \psi_i$

$g_{2i}(\hat{\sigma}_v^2) = (1 - \hat{\gamma}_i)^2 \boldsymbol{x}_i^T \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{(\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)}\right]^{-1} \boldsymbol{x}_i$

$g_{3i}(\hat{\sigma}_v^2) = \psi_i^2 (\psi_i + \hat{\sigma}_v^2)^{-3}\, \overline{V}\,(\hat{\sigma}_v^2)$

$\overline{V}\,(\hat{\sigma}_v^2)$ adalah ragam asimptot dari $(\hat{\sigma}_v^2)$ dengan rumus

$\overline{V}\,(\hat{\sigma}_v^2) = 2m^{-2} \sum_{i=1}^{m} (\hat{\sigma}_v^2 + \psi_i)^2$

Menurut Kurnia (2009), evaluasi hasil kajian menggunakan *Relative Root Mean Square Error* (RRMSE) diperoleh dengan perhitungan sebagai berikut:

$$\text{RRMSE}\,(\hat{\theta}_i^{EBLUP}) = \frac{\sqrt{\text{MSE}(\hat{\theta}_i^{EBLUP})}}{\hat{\theta}_i^{EBLUP}}\, x\ 100\% \tag{21}$$

3. METODE PENELITIAN

3.1.Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dari Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) BPS Tahun 2013 untuk variabel respon yaitu pengeluaran per kapita dengan informasi yang berbasis rumah tangga dan variabel penyerta diperoleh dari publikasi BPS yaitu Brebes dalam Angka Tahun 2014 dengan variabel penyerta yaitu jumlah kelahiran penduduk (X1), jumlah kematian penduduk (X2), jumlah keluarga miskin (X3), jumlah penduduk yang berprofesi sebagai petani atau peternak (X4), jumlah penduduk yang memiliki kendaraan roda 2 (X5), dan jumlah sarana kesehatan (puskesmas, poliklinik kesehatan desa, balai pengobatan, rumah sakit khusus, rumah bersalin, dan rumah sakit umum) (X6). Jumlah kecamatan yang disurvei pada SUSENAS tahun 2013 sebanyak 17 Kecamatan dengan jumlah rumah tangga sebanyak 954.

3.2.Metode Analisis

Tahapan analisis data adalah melakukan uji normalitas terhadap pengeluaran per kapita dengan metode pendugaan langsung menggunakan Uji *Kolmogorov-Smirnov*, memilih variabel penyerta dengan melakukan uji korelasi antar nilai pengeluaran per kapita penduga langsung ($\hat{\theta}$) dengan masing-masing variabel penyerta (X) dengan menggunakan koefisien korelasi Pearson, melakukan pendugaan terhadap $\hat{\beta}$, pengaruh acak (v_i) dan varian dari pengaruh acak ($\hat{\sigma}_v^2$), melakukan uji normalitas terhadap pengaruh acak (v_i) menggunakan Uji *Kolmogorov-Smirnov*, menduga pengeluaran per kapita untuk masing-masing kecamatan dengan menggunakan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}^{EBLUP}$), menghitung nilai RRMSE penduga langsung dan nilai RRMSE pengeluaran per kapita hasil metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}^{EBLUP}$), dan membandingkan nilai RRMSE penduga langsung dan nilai RRMSE hasil metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1.Penduga Langsung Pengeluaran Per Kapita

Berdasarkan hasil perhitungan dengan penduga langsung didapatkan nilai rata-rata pengeluaran per kapita sebesar Rp 561.847 dengan koefisien varian 20,44%. Hasil penduga langsung pengeluaran per kapita masing-masing kecamatan di Kabupaten Brebes adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Pengeluaran Per Kapita Penduga Langsung di Kabupaten Brebes (x Rp 100.000)

i	Kecamatan	Jumlah Pengeluaran Per Kapita Rumah Tangga di Kecamatan-i	Jumlah Rumah Tangga	Pengeluaran Per Kapita
1	Salem	110,22532	20	5,51127
2	Bantarkawung	135,07527	30	4,50251
3	Bumiayu	238,35607	49	4,86441
4	Paguyangan	135,21250	30	4,50708
5	Sirampog	226,54294	50	4,53086
6	Tonjong	85,31305	20	4,26565
7	Larangan	386,74758	60	6,44579
8	Ketanggungan	398,22268	79	5,04079
9	Banjarharjo	418,63355	70	5,98048
10	Losari	455,42690	80	5,69284
11	Tanjung	136,99806	29	4,72407
12	Kersana	569,39258	100	5,69393
13	Bulakamba	691,80632	107	6,46548
14	Wanasari	372,50342	60	6,20839
15	Songgom	215,78070	40	5,39452
16	Jatibarang	273,10932	40	6,82773
17	Brebes	797,24172	90	8,85824

4.2.Pemilihan Variabel

Pemilihan variabel penyerta dilakukan dengan melihat ada atau tidaknya hubungan atau korelasi dengan variabel yang diamati. Semakin besar nilai korelasi antara pengeluaran per kapita dengan variabel penyerta maka akan semakin baik hasil pendugaannya. Berdasarkan uji korelasi Pearson didapatkan nilai korelasi dan signifikansi sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai Korelasi Pearson Pengeluaran Per Kapita dengan Variabel Penyerta

Variabel	$r_{x\hat{\theta}}$	Sig
X1	0,641	0,006
X2	0,675	0,003
X3	0,287	0,264
X4	0,339	0,183
X5	0,838	0,000
X6	0,628	0,007

Berdasarkan Tabel 2, pada taraf signifikansi 5% didapat hasil bahwa variabel penyerta yang berkorelasi dengan pengeluaran per kapita adalah jumlah kelahiran penduduk (X1), jumlah kematian penduduk (X2), jumlah penduduk yang memiliki kendaraan roda 2 (X5) dan jumlah sarana kesehatan (puskesmas, poliklinik kesehatan desa, balai pengobatan, rumah sakit khusus, rumah bersalin dan rumah sakit umum) (X6).

4.3. Penduga Area Kecil dengan Menggunakan Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

Setelah mendapat variabel penyerta yang berkorelasi dengan variabel pengeluaran per kapita pada sub bab sebelumnya, langkah awal untuk menentukan nilai pengeluaran per kapita dengan menggunakan metode EBLUP adalah dengan menentukan terlebih dahulu nilai pendugaan terhadap koefisien regresi ($\hat{\beta}$), pengaruh acak (v_i), dan varians pengaruh acak ($\hat{\sigma}_v^2$). Dari hasil pendugaan pada prosedur *mixed* dalam SAS, didapat nilai pendugaan pengaruh acak ($\hat{\sigma}_v^2$) sebesar 0,1602 dan koefisien regresi sebagai berikut:

Tabel 4 . Hasil Pendugaan Koefisien Regresi

Variabel	$\hat{\beta}$
X0	3,975100
X1	-0,000380
X2	0,001278
X5	0,000122
X6	-0,022920

Sebelum nilai tersebut digunakan untuk menduga nilai pengeluaran per kapita, maka dilakukan uji normalitas terhadap pengaruh acak (v_i). Berdasarkan uji *Kolmogorov-smirnov* yang menunjukan nilai Sig. (>0,150) >α (0,05) sehingga didapat hasil bahwa asumsi normalitas terpenuhi dan nilai koefisien regresi ($\hat{\beta}$) dan varians pengaruh acak ($\hat{\sigma}_v^2$) dapat digunakan untuk menghitung nilai pengeluaran per kapita dengan metode EBLUP.

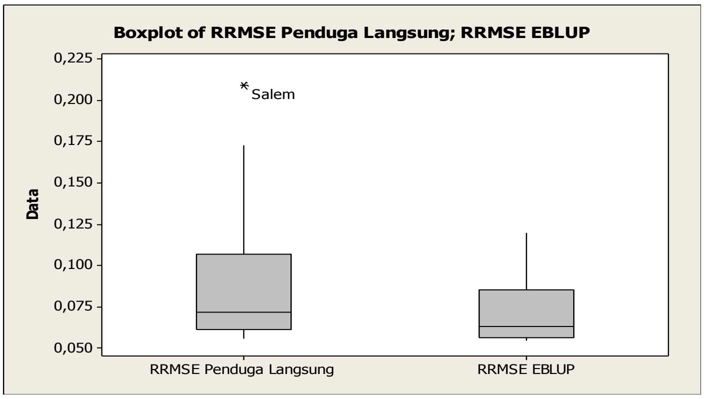
Berdasarkan hasil perhitungan dengan penduga EBLUP didapatkan nilai rata-rata pengeluaran per kapita sebesar Rp 549.713 dengan koefisien varian 18,17%. Nilai pendugaan pengeluaran per kapita masing-masing kecamatan di Kabupaten Brebes dengan metode EBLUP adalah sebagai berikut:

Tabel 8 . Pengeluaran Per Kapita Penduga EBLUP di Kabupaten Brebes (x Rp 100.000)

i	Kecamatan	Penduga EBLUP
1	Salem	4,59144
2	Bantarkawung	4,66800
3	Bumiayu	5,23201
4	Paguyangan	4,90365
5	Sirampog	4,57795
6	Tonjong	4,40645
7	Larangan	6,34163
8	Ketanggungan	5,24848
9	Banjarharjo	5,71974
10	Losari	5,52258
11	Tanjung	4,84380
12	Kersana	5,37311
13	Bulakamba	6,09439
14	Wanasari	6,31764
15	Songgom	5,23598
16	Jatibarang	5,66260
17	Brebes	8,58910

4.4. Perbandingan Pengeluaran Per Kapita Hasil Pendugaan Langsung dan Pendugaan Area Kecil dengan Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

Setelah dilakukan estimasi terhadap pengeluaran per kapita baik menggunakan pendugaan langsung maupun pendugaan tidak langsung dengan menggunakan metode EBLUP, langkah berikutnya adalah menghitung nilai RRMSE hasil kedua pendugaan tersebut. Berdasarkan perhitungan RRMSE pada penduga langsung dan penduga EBLUP, didapatkan nilai rata-rata RRMSE penduga langsung sebesar 0,07219 dan rata-rata RRMSE penduga EBLUP sebesar 0,09361. Nilai RRMSE penduga langsung dan RRMSE penduga EBLUP pada masing-masing kecamatan di Kabupaten Brebes dapat dilihat pada boxplot berikut:



Gambar 1. Boxplot RRMSE Penduga langsung dan RRMSE EBLUP

Gambar 1 menunjukkan bahwa RRMSE penduga langsung lebih besar daripada RRMSE penduga EBLUP. Pola kedua nilai RRMSE tersebut terlihat lebih besar pada bagian atas. Hal tersebut menunjukkan persebaran nilai RRMSE tiap kecamatan di Kabupaten Brebes lebih banyak berada di bawah nilai rata-rata nilai MSE Kabupaten Brebes. Nilai rata-rata RRMSE penduga langsung terlihat lebih besar dibandingkan dengan nilai rata-rata RRMSE pada penduga EBLUP. Hal ini menunjukkan bahwa pendugaan area kecil dengan metode EBLUP dapat memperbaiki hasil penduga langsung.

5. KESIMPULAN

Pada penduga langsung didapatkan rata-rata pengeluaran per kapita Rp 561.847. Pengeluaran per kapita tertinggi terletak pada Kecamatan Brebes yaitu Rp 885.824 dan terendah terdapat pada Kecamatan Tonjong yaitu Rp 426.565, dengan koefisien varian 20,44%. Pada penduga area kecil dengan metode EBLUP didapatkan rata-rata pengeluaran per kapita Rp 549.713. Pengeluaran per kapita tertinggi terdapat pada Kecamatan Brebes yaitu Rp 858.910 dan terendah terdapat pada Kecamatan Tonjong yaitu Rp 418.345, dengan koefisien varian 18,17%.

Penduga area kecil dengan metode EBLUP menghasilkan nilai RRMSE yang lebih kecil dengan nilai rata-rata RRMSE sebesar 0,07219 dibandingkan dengan nilai RRMSE pada penduga langsung dengan nilai rata-rata RRMSE sebesar 0,09361. Oleh karena itu, penduga area kecil dengan metode EBLUP pengeluaran per kapita di Kabupaten Brebes lebih baik dibandingkan dengan hasil pada penduga langsung.

DAFTAR PUSTAKA

[BPS]. 2014. *Brebes dalam Angka 2014*. Brebes: Badan Pusat Statistik Kabupaten Brebes.

[BPS]. *Indeks Pembangunan Manusia*. http://jateng.bps.go.id/webbeta/frontend/Subjek/view/id/26#subjekViewTab3 (diakses tanggal 07 Maret 2015)

Daniel, W.W. 1989. *Statistika Nonparametrik Terapan*. Jakarta. PT Gramedia.

Hasan, M.I. 2005. *Pokok-pokok Materi Statistika 2 (Statistika Inferensif)*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.

Hines, W.W. dan Montgomery, D.C. 1990. *Probabilita dan Statistika dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. Edisi ke-2 (Terjemahan Rudiansyah). Jakarta. UI Press.

Kurnia, A. 2009. *Prediksi Terbaik Empirik Untuk Model Transformasi Logaritma Di Dalam Pendugaan Area Kecil Dengan Penerapan Pada Data Susenas* [Disertasi]. Bogor. Pascasarjana, IPB.

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation*. New York. Jhon Willey and sons, Inc.

Usman, H. dan Akbar, R.P.S. 2008. *Pengantar Statistika*. Jakarta. Bumi Aksara.